

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

le grade de DOCTEUR de 3^e CYCLE en PHYSIQUE NUCLÉAIRE

par

Richard BOUCHÉ

SUJET

ETUDE DES PROPRIETES STATISTIQUES
DE LA
STRUCTURE MULTIPLICATRICE
D'UN PHOTOMULTIPLICATEUR

Soutenue le 24 Février 1965

devant la Commission d'Examen :

M. A. SARAZIN

Président

Mme M. ERICSON

M. J.J. SAMUELI

} Examineurs

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

le grade de DOCTEUR de 3^e CYCLE en PHYSIQUE NUCLÉAIRE

par

Richard BOUCHÉ

SUJET

ETUDE DES PROPRIETES STATISTIQUES
DE LA
STRUCTURE MULTIPLICATRICE
D'UN PHOTOMULTIPLICATEUR

Soutenue le 24 Février 1965
devant la Commission d'Examen :



M. A. SARAZIN

Président

Mme M. ERICSON

M. J.J. SAMUELI

}
Examineurs

U N I V E R S I T E D E L Y O N

F A C U L T E D E S S C I E N C E S

Doyens Honoraires

MM. LONGCHAMBON
 DOUIN
 MOUSSA
 GAUTHIER Henri

Professeurs Honoraires

MM. LOCQUIN
 de LAREMBERGUE
 SOLLAUD
 MENTZER
 MOUSSA
 JAFFARD
 DOUIN
 EYRAUD Henri
 DEJARDIN
 VIRET

Doyen

M. BRACONNIER

Assesseurs

MM. MESNARD
 BOIDIN

Professeurs

MM. LONGCHAMBON	Minéralogie
PRETTRE	Chimie industrielle
COURTY	Chimie- Physique
KUHNER	Botanique
MALECOT	Mécanique rationnelle et appliquée
PARIS	Chimie minérale
AUMERAS	Chimie
COLONGE	Chimie organique
JANIN	Physique générale
FLANDRIN	Géologie appliquée
BERNARD	Physique industrielle
DUFAY Jean	Astronomie
NIGON	Zoologie expérimentale
GAUTHIER Henri	Géologie générale
WAUTIER	Zoologie
CHOPIN	Chimie biologique
CUEILLERON	Chimie
BRACONNIER	Calcul différentiel et intégral
EYRAUD Charles	Chimie-Physique appliquée
SARAZIN	Physique nucléaire
BOLDIN	Microbiologie et Mycologie
PERES	Physiologie
MESNARD	Electronique
GRANDMONTAGNE	Physique
BOUTILLIER	Minéralogie
LAFOUCRIERE	Physique nucléaire théorique
DREUX	Chimie organique
TEICHNER	Chimie industrielle
PAVANS de CECCATTY	Zoologie
MERLIN	Chimie analytique
DUFAY Maurice	Physique de l'Atmosphère
LUBET	Physiologie
PHILBERT	Physique nucléaire
COHEN-ADDAD	Chimie
DAVID Louis	Géologie générale
CHANEL	Psychophysiologie
MAURY	Méthodes mathématiques de la Physique
DEPRAZ	Physique nucléaire
GAUTHIER Jean	Chimie
GAUME	Physique expérimentale

Professeurs sans Chaire

MM.	FERON	Mathématiques
	LAFORGUE	Physique
	LEGAY	Zoologie expérimentale S.P.C.N.
	UZAN	Physique S.P.C.N.
	CHENEVOY	Géologie appliquée
	GINET	Zoologie
	ASCH	Physique
	MICHEL Pierre	Minéralogie
	DUCET	Biologie végétale
Mle	MAITROT	Physique
MM.	GEVIN	Géologie générale
	PONASSE	Mathématiques
	d ^r INCAN	Physique
	LEFEBVRE	Mathématiques
	PERNET	Mathématiques
	CHERY	Physique
	BERGEON	Physique C.S.U.
Mle	GAUTHERON	Chimie biologique

Maîtres de Conférences

Mme	ERICSON	Physique générale
MM.	MARTEL	Mécanique
	MATHIEU	Mécanique des Fluides
	ERBEIA	Physique
	DESCOTES	Chimie organique
	PICARD Philippe	Mathématiques
	LEMOIGNE	Botanique
	DEMARCO	Géologie générale
	MICHEL Georges	Biochimie
	LEBRETON	Biologie végétale
	DAVID Jean	Biologie animale
	TOUSSET	Chimie propédeutique
	FEUVRAIS	Physique Electricité
	PICARD Claude	Mathématiques
	SCHMITT	Physique M.P.C.
	LAURENT	Chimie organique
	ROT	Mathématiques
	BETHOUX	Mathématiques
Mle	CALAIS	Mathématiques
	GUSAKOW	Physique

Maître de Conférences Adjoint
.....

M. PIERRON

Chimie

Conseiller Administratif
.....

M. BURNET

Secrétaire Principal Honoraire
.....

M. ROUX

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur A. SARAZIN, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et l'appui que j'ai toujours trouvé auprès de lui.

Que Monsieur J. J. SAMUELI, Chef du Service d'Instrumentation Nucléaire, qui a suggéré et dirigé ce travail, veuille trouver ici l'expression de ma vive gratitude pour ses nombreux conseils et son aide constante en toutes circonstances.

Je remercie vivement Madame ERICSON, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon, pour l'intérêt qu'elle a manifesté à l'égard de mon étude.

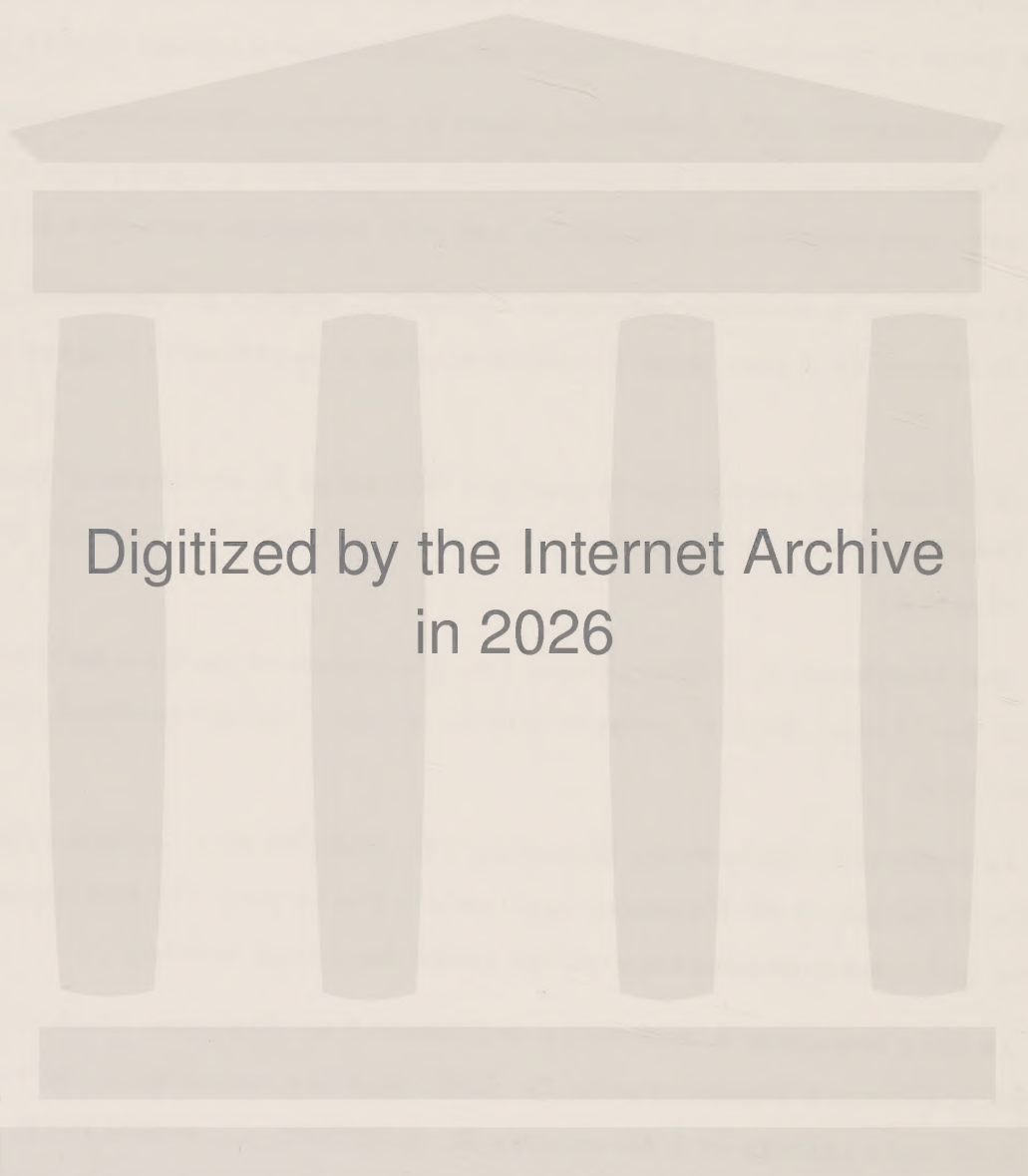
Qu'il me soit permis de remercier Monsieur le Professeur MALECOT pour les fructueux entretiens qu'il m'a accordés et l'excellent accueil qu'il m'a toujours réservé.

Que Monsieur J. GREA trouve ici, l'expression de mon amicale gratitude pour l'aide précieuse que j'ai trouvée auprès de lui et le dévouement constant dont il a fait preuve.

Je remercie également, Messieurs G. PIETRI et J. NUSSLI du Laboratoire d'Electronique et de Physique appliquée à Paris pour les intéressantes conversations que nous avons eues, qui m'ont guidé dans mon travail.

Je dois beaucoup à mes amis de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon et tout spécialement à Mademoiselle G. ESPI dont les remarques intéressantes m'ont aidé dans mes calculs et à Messieurs R. ROUGNY, J. PIGNERET, J. GUYON, M. GOYOT et R. GENRE. Qu'ils trouvent ici un témoignage de ma reconnaissance.

Ce travail n'aurait pu se faire sans l'aide matérielle d'une bourse -thèse du Commissariat à l'Energie Atomique. Je tiens à en remercier Monsieur le Haut Commissaire à l'Energie Atomique ainsi que Monsieur le Professeur COTTON, Chef du Service de Physique Nucléaire aux basses énergies au Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, pour l'intérêt qu'il n'a cessé de me témoigner.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553416_0046

INTRODUCTION

Le photomultiplicateur est d'une utilisation très courante en physique Nucléaire. Associé à un scintillateur, ce tube constitue un excellent système détecteur dont une des qualités les plus intéressantes est de pouvoir donner, sur un rayonnement, une information non seulement, sur son énergie, mais encore sur l'instant où il est détecté. Il en résulte qu'il peut être utilisé dans des conditions aussi différentes que la spectrométrie gamma ou bêta, ou la mesure d'intervalles de temps très courts.

Une analyse simple du fonctionnement du photomultiplicateur permet de mettre en évidence l'aspect aléatoire des phénomènes mis en jeu. En conséquence, la réponse à un rayonnement aux caractéristiques précises est une variable aléatoire dont les fluctuations imposent une limite à la précision des mesures tant en énergie qu'en temps. De là, une définition de la résolution du détecteur dans ces deux domaines.

Il est évident que l'on peut dissocier la contribution à ces résolutions, du photomultiplicateur d'une part et, du scintillateur d'autre part.

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier l'influence du photomultiplicateur seul, notre but final étant le suivant : déduire de la connaissance de sa réponse percutationnelle, d'une part les limites intrinsèques de mesures dues à ce tube, d'autre part, dans le domaine des mesures de temps, les conditions expérimentales donnant la précision la meilleure. En effet, le problème de la définition de l'instant auquel a eu lieu l'interaction nucléaire détectée est très complexe et on peut montrer que la variance de cet instant dépend de son mode de définition.

Dans ce travail nous n'avons pas atteint ce résultat final. Après avoir procédé à une revue des travaux effectués dans le domaine des diverses résolutions, nous apportons une contribution au calcul de la résolution en temps, et effectuons une approche, inédite par certains aspects, de l'étude statistique du multiplicateur.

Dans une première partie nous calculons la résolution en énergie. Nous

avons besoin pour cela de notions simples de statistique que nous rappelons brièvement.

Pour la résolution en temps, une analyse de l'action des différentes parties du photomultiplicateur vis à vis de la variable temps nous montre qu'il est pratiquement impossible d'utiliser les procédés de calcul classiques. Le problème le plus important est de connaître la réponse percussionnelle du multiplicateur d'électrons. Si nous nous plaçons dans un cas où cette réponse est très brève devant celle du scintillateur, ce qui revient à attribuer à celui-ci une influence prépondérante, le calcul est abordable. Nous déterminerons la résolution en temps dans ce cas. Par contre si nous nous plaçons dans un cas général, le calcul est impossible et E.GAT-TI et ses collaborateurs (6, 7, 8, 9,) qui ont abordé le problème ont dû utiliser une formule empirique pour décrire la réponse percussionnelle du multiplicateur.

Nous nous proposons donc, dans notre seconde partie, d'utiliser d'autres procédés que les procédés classiques pour calculer cette réponse percussionnelle. Nous utilisons la méthode de Monte Carlo qui consiste en une simulation sur ordinateur électronique du fonctionnement du multiplicateur.

Nous expliquons, d'abord, comment se présente cette méthode de calcul, comment il est possible de générer des distributions statistiques dans un ordinateur et, comment de telles générations nous permettent de simuler un phénomène aléatoire.

Nous essayons ensuite de définir un modèle statistique du photomultiplicateur à partir des résultats expérimentaux connus. Ceci nous permet de mettre au point les programmes de simulation.

Nous procédons enfin à deux simulations.

Dans la première, nous avons choisi un modèle de photomultiplicateur très simple dans lequel tous les étages sont identiques. Ceci revient, en fait, à étudier une structure multiplicatrice seule, mais nous permet déjà de tirer des conclusions intéressantes.

Dans la seconde simulation, nous choisissons un modèle plus proche de la réalité, en tenant compte des différentes caractéristiques entre l'optique d'entrée, le premier espace interdynode et le reste de la structure multiplicatrice.

Nous verrons ainsi que l'étude est beaucoup plus profitable dans le cas d'une structure multiplicatrice simple que dans le cas du modèle compliqué et qu'il conviendrait d'orienter l'étude dans ce sens.

PREMIERE PARTIE

ETUDE GENERALE DU PHOTOMULTIPLICATEUR - RESOLUTION

- I - Rappels sur le fonctionnement du photomultiplicateur.
- II - Résolution en énergie.
- III - Résolution en temps.

CHAPITRE I

RAPPELS SUR LE FONCTIONNEMENT DES PHOTOMULTIPLICATEURS

Un photomultiplicateur se compose de deux parties principales :

- La photocathode,
- La structure itérative du multiplicateur d'électrons.

Le couplage entre ces deux parties est assuré par l'optique d'entrée.

I - 1 - LA PHOTOCATHODE ET L'OPTIQUE D'ENTREE

La photocathode transforme un nombre de photons incidents en un nombre d'électron émis, proportionnel en moyenne. Cette transformation est pratiquement instantanée. Le coefficient de proportionnalité est appelé rendement quantique.

En fait, cette transformation a un caractère statistique. En réponse à un photon incident le nombre d'électrons émis et la vitesse de chacun d'eux sont des grandeurs aléatoires.

Le rôle de l'optique d'entrée est justement d'essayer de corriger les différentes trajectoires possibles pour que la plus forte proportion des électrons émis puisse être introduite dans le multiplicateur pendant un temps minimal.

I - 2 - LE MULTIPLICATEUR D'ELECTRONS

Le multiplicateur d'électrons amplifie le nombre d'électrons. Une structure itérative est réalisée avec des dynodes, chacune multipliant les électrons incidents grâce au phénomène d'émission secondaire.

Tout comme l'émission photoélectrique, l'émission secondaire a un caractère statistique.

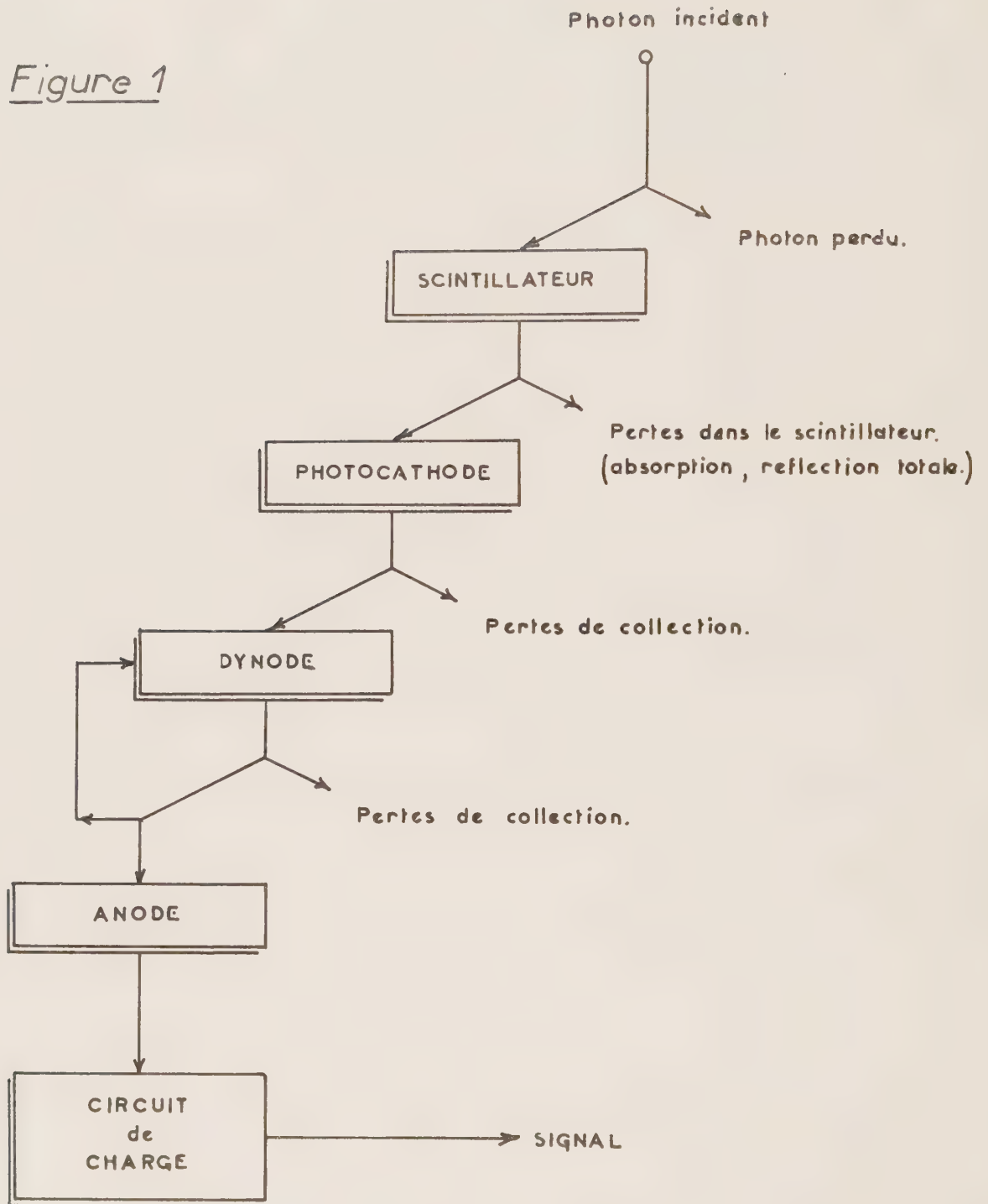
En réponse à un électron primaire incident le nombre des électrons secondaires et leurs vitesses sont des grandeurs aléatoires. Il en résulte qu'à son arrivée sur l'anode, le paquet d'électrons, qui va donner le signal utilisable, obéit à une distribution statistique en temps et en nombre.

On conçoit très facilement l'intérêt que représente la connaissance de cette distribution statistique dans la détermination de la résolution de détecteur utilisant le photomultiplicateur.

Nous remarquerons cependant que, dans la majorité des cas en physique nucléaire, le photomultiplicateur est associé à un scintillateur. Celui-ci joue le rôle d'un changeur de fréquence transformant les photons incidents en photons optiques destinés à la photocathode. Cette transformation met en jeu des phénomènes complexes et présente elle aussi un caractère aléatoire. Nous ne tiendrons pas compte, dans cette étude, de cet aspect statistique ; nous n'utiliserons que les propriétés moyennes du scintillateur. Notamment, en réponse à un photon, nous décrirons l'effet moyen du scintillateur par une loi d'illumination :

$$I(t) = \frac{R}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'ensemble du détecteur à scintillation est représenté par le schéma de la figure 1.

Figure 1

CHAPITRE II

RESOLUTION DU PHOTOMULTIPLICATEUR EN ENERGIE

Tout au long de la chaîne représentée par la figure 1 il s'effectue des transformations linéaires, c'est à dire qu'il y a proportionnalité entre :

- l'énergie du photon incident et le nombre de photons optiques émis.
- le nombre de photons optiques et le nombre de photoélectrons.
- le nombre de photoélectrons et le nombre d'électrons recueillis par l'anode.
- le nombre d'électrons collectés et l'amplitude du signal utilisable.

Les trois premiers cas sont réalisés en valeur moyenne. Le dernier point est réalisé par un circuit de charge intégrateur.

Cependant, à cause des fluctuations statistiques déjà signalées, pour un photon incident d'une énergie donnée, l'amplitude du signal de sortie subit certaines fluctuations. C'est justement à cause de celles-ci que nous pouvons parler de résolution en énergie du photomultiplicateur.

Avant d'essayer de déterminer cette résolution nous allons procéder à un bref rappel sur l'utilisation des fonctions génératrices en statistique.

II - 1 - RAPPELS SUR LES FONCTIONS GENERATRICES (1) :

II-1-a - Définitions :

Soit une variable aléatoire s pouvant prendre les valeurs discrètes $s = 0, 1, 2 \dots$ avec les probabilités correspondantes $p_0, p_1, p_2 \dots$. On appellera fonction génératrice relative à s la fonction :

$$G(x) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s x^s$$

On démontre facilement que les moments de la distribution de s s'obtiennent par :

$$\bar{s} = \left(\frac{dG}{dx} \right)_{x=1}$$

$$\sigma_s^2 = \overline{s^2} - \bar{s}^2 = \left(\frac{d^2G}{dx^2} \right)_{x=1} + \left(\frac{dG}{dx} \right)_{x=1} - \left(\frac{dG}{dx} \right)_{x=1}^2$$

II.1-b - Application à des processus particuliers :

Processus par tout ou rien :

Un événement se produit ou ne se produit pas. Nous lui associons une variable s qui prend respectivement la valeur 1 ou 0. Il est facile de voir que, si p est la probabilité pour que l'événement se produise, la fonction génératrice associée à s sera :

$$G(x) = 1 - p + p x$$

On a alors :

$$\bar{s} = p \qquad \sigma^2 = p(1-p)$$

Processus en cascade :

Soit A un événement qui se produit d'abord et a pour résultat le nombre s_A . L'événement B lui succède et se produit s_A fois. Le résultat final est le nombre s .

Les événements A et B sont caractérisés par les fonctions génératrices respectives $A(x)$ et $B(x)$.

Les variables mises en jeu sont respectivement s_A , s_B de valeur moyenne $\bar{s}_A$, $\bar{s}_B$ de variance σ_A^2 , σ_B^2 et de variance relative v_A , v_B .

On peut montrer que la fonction génératrice relative à s est :

$$G(x) = A.[B(x)]$$

$$\bar{s} = \bar{s}_A \cdot \bar{s}_B$$

$$\sigma^2 = \bar{s}_B \cdot \sigma_A^2 + \bar{s}_A \cdot \sigma_B^2$$

$$v = v_A + \frac{v_B}{\bar{s}_A}$$

On généralise facilement à une cascade de n événements A_i .

$$\bar{s} = \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{s}_3 \cdot \dots \cdot \bar{s}_n$$

$$v = v_1 + \frac{v_2}{\bar{s}_1} + \frac{v_3}{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2} + \dots + \frac{v_n}{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{s}_3 \cdot \dots \cdot \bar{s}_{n-1}}$$

Nous allons retrouver ces deux processus dans le photomultiplicateur et utiliser ces résultats pour calculer la résolution en énergie.

II - 2 - CALCUL DE LA RESOLUTION EN ENERGIE

II-2-a - Rôle du photomultiplicateur seul :

En réponse à un photon optique il se produit une cascade de trois processus :

- Emission photoélectronique : Un photon optique donne naissance à un photoélectron avec une probabilité λ . (λ est le rendement quantique). C'est un processus par tout ou rien de fonction génératrice $G_1(x)$.

$$G_1(x) = 1 - \lambda + \lambda \cdot x$$

s_1 est la variable associée à ce processus, sa variance relative est :

$$v_1 = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

- Collection des photoélectrons par la première dynode : Une photoélectron a la probabilité η d'être collecté par la première dynode (η est le rendement de collection). C'est un autre processus par tout ou rien de fonction génératrice $G_2(x)$.

$$G_2(x) = 1 - \eta + \eta \cdot x$$

s_2 est la variable associée à ce processus sa variance relative est :

$$v_2 = \frac{1 - \eta}{\eta}$$

- Multiplication des électrons : La fonction génératrice relative à ce processus ne sera pas explicitée on l'appellera $G_3(x)$. La variable associée sera g de

variance relative v_g .

Soit P le résultat de ces trois processus en cascade. La fonction génératrice globale décrivant le fonctionnement du photomultiplicateur sera :

$$\begin{aligned} G_p(x) &= G_1 \left\{ G_2 \left(G_3(x) \right) \right\} \\ &= 1 - \lambda + \lambda \cdot \left\{ 1 - \eta + \eta \cdot G_3(x) \right\} \\ &= 1 - \eta \cdot \lambda + \eta \cdot \lambda \cdot G_3(x) \end{aligned}$$

La variance relative de P est :

$$\begin{aligned} v_p &= v_1 + \frac{v_2}{s_1} + \frac{v_3}{s_1 \cdot s_2} \\ &= \frac{1 - \lambda}{\lambda} + \frac{1 - \eta}{\eta \cdot \lambda} + \frac{v_g}{\eta \cdot \lambda} \\ &= \frac{1 + v_g}{\eta \cdot \lambda} - 1 \end{aligned}$$

II-2-b - Résolution de l'ensemble photomultiplicateur-scintillateur (2) :

Nous décrirons l'ensemble à l'aide du schéma de la figure 2.

Un photon γ arrive sur le scintillateur. Nous admettrons qu'il perd toujours la même énergie et qu'il donne naissance à X photons.

X est une variable aléatoire de valeur moyenne $\bar{X}$ et la fonction génératrice qu'on lui associe est $G_X(x)$.

Les photons optiques créés sont émis en différents points du scintillateur. Soit q_i la probabilité pour qu'un photon provienne d'un volume élémentaire i . Un tel photon atteint ou n'atteint pas la photocathode. Nous appellerons T_i la probabilité pour qu'il ne soit pas perdu.

Le photon émis à partir du volume i peut être associé à une fonction génératrice :

$$A_i(x) = 1 - T_i + T_i \cdot x$$

Pour rendre compte du processus global de transmission dans le scintilla-

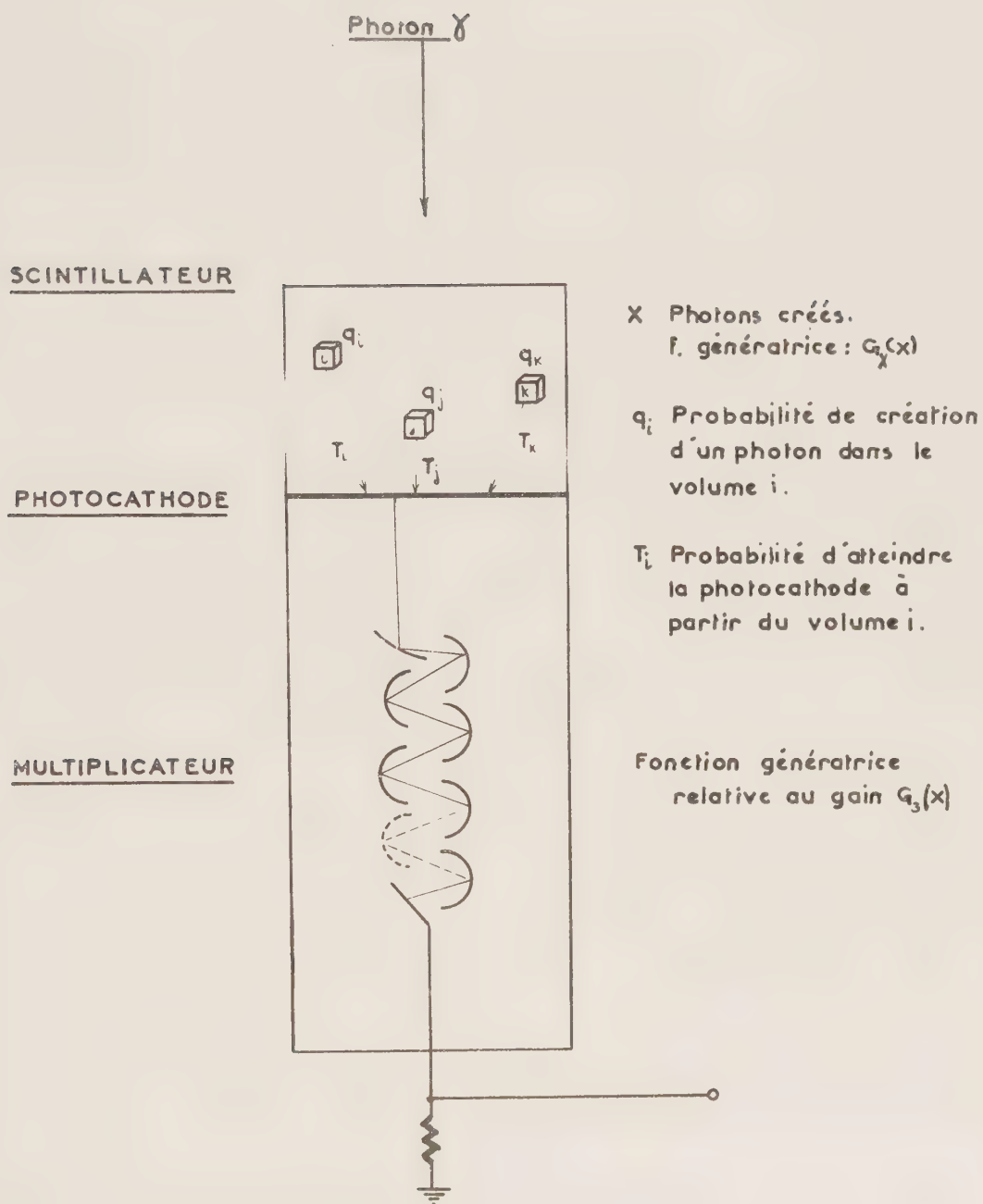


Figure 2

teur il faut donc tenir compte de toutes les fonctions génératrices $A_i(x)$ pondérées par les probabilités de création d'un photon optique dans le volume i . D'où la fonction génératrice globale :

$$G_T(x) = \sum_i A_i(x) \cdot q_i = \sum_i q_i \cdot (1 - T_i + T_i \cdot x)$$

La variable associée sera T qui rend compte de la transmission dans le scintilla - teur sa valeur moyenne est $\overline{T}$.

Les photoélectrons atteignant la photocathode provoquent le processus déjà décrit de fonction génératrice $G_P(x)$.

Les trois processus associés respectivement à G_X , G_T , G_P constituent une cascade dont la fonction génératrice sera :

$$G(x) = G_X \left\{ G_T \left(G_P(x) \right) \right\}$$

Soit :

$$G(x) = G_X \left[\sum_i q_i \cdot \left\{ 1 - T_i + T_i \cdot G_P(x) \right\} \right]$$

Appelons M le nombre d'électrons collectés sur l'anode en réponse à un photon γ incident. $G(x)$ est sa fonction génératrice. Nous avons :

$$\overline{M} = \overline{X} \cdot \overline{T} \cdot \overline{P} \qquad \nu_M = \nu_X + \frac{\nu}{\overline{X}} + \frac{\nu}{\overline{X} \cdot \overline{T}}$$

Nous connaissons ν_T :

$$\nu_T = \frac{1 - \sum_i q_i \cdot T_i}{\sum_i q_i \cdot T_i} \qquad \text{mais} \qquad \sum_i q_i \cdot T_i = \overline{T}$$

$$\nu_T = \frac{1 - \overline{T}}{\overline{T}}$$

Posons $\overline{X} \cdot \overline{T} = R$ nombre moyen de photons optiques atteignant la photo - cathode.

On a :

$$\nu_M = \nu_X - \frac{1}{\overline{X}} + \frac{\nu_P + 1}{R}$$

soit en remplaçant par l'expression de ν_p déjà calculée :

$$\nu_M = \nu_x - \frac{1}{X} + \frac{1 + \nu_g}{\eta \cdot \lambda \cdot R}$$

Approximons par une loi gaussienne la distribution du nombre d'électrons collectés par l'anode. La résolution dans ce cas est donnée par :

$$\rho = \frac{\Delta E \text{ (à mi hauteur)}}{E} = 2,36 \cdot (\nu_M)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho = 2,36 \cdot \left\{ \nu_x - \frac{1}{X} + \frac{1 + \nu_g}{\eta \cdot \lambda \cdot R} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

On remarquera que la connaissance de ν_g est indispensable pour calculer la résolution en énergie. Il faut donc, pour cela, connaître la distribution du gain du multiplicateur. On peut, dans certaines conditions, obtenir cette distribution expérimentalement (2) (3) ou même la calculer (4) (5) . Dans ce dernier cas il est alors nécessaire de connaître la distribution du coefficient d'émission secondaire sur chaque dynode et de tenir compte des pertes de collection.

CHAPITRE III

RESOLUTION EN TEMPS DU PHOTOMULTIPLICATEURIII-1 - ACTION DES DIFFERENTES PARTIES DU PHOTOMULTIPLICATEUR VIS A VIS DE LA VARIABLE TEMPS.III-1-a - La photocathode :

On admet en général (6, 7, 8, 9, 10) que, pour une excitation lumineuse donnée, le nombre des photoélectrons suit une loi de Poisson. Si nous considérons une loi d'illumination $I(t)$ le nombre moyen de photons ayant atteint la photocathode à l'instant t est :

$$\overline{N} = \int_0^t I(t) dt$$

La probabilité d'avoir Q photoélectrons émis dans l'intervalle $(0, t)$ s'exprimera par :

$$P_t(Q) = \frac{\overline{N}^Q}{Q!} e^{-\overline{N}}$$

III-1-b - L'optique d'entrée et le multiplicateur :

L'ensemble sera caractérisé par sa réponse percuSSIONNELLE. Nous considérerons, comme dans les travaux de GATTI, une réponse de la forme :

$$A \cdot f(t, \lambda, h) \quad (7, 8, 9, 10)$$

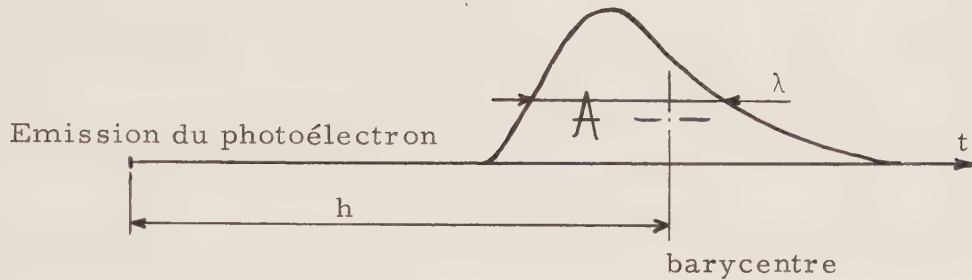
avec

$$\int_0^\infty f(t, \lambda, h) dt = 1$$

- A est le gain du photomultiplicateur.
- h rend compte de la position du centre de gravité des charges collectées par l'anode.
- λ traduit la largeur de l'impulsion.

On a :

$$\overline{\lambda^2} = \int_0^{\infty} (t-h)^2 \cdot f(t, \lambda, h) dt$$



A, h, λ , sont des grandeurs aléatoires de valeurs moyennes respectives $\overline{A}, \overline{h}, \overline{\lambda}$. Les variances relatives de A et λ sont ϵ_A^2 et ϵ_λ^2 . La variance de h est ϵ_{ph}^2 .

III-1-c - Circuit de charge :

Il est nécessaire de définir dans le signal de sortie un instant de référence. Avec GATTI (7, 8, 9, 10) nous considérerons deux cas :

- t_i est l'instant où une charge C déterminée est collectée par l'anode.
- t_c est le barycentre d'un nombre déterminé C d'électrons collectés par l'anode.

Les conditions de travail étant bien précisées nous allons définir trois domaines d'étude.

III-1-d - Domaines d'études

Nous avons vu que pour décrire le fonctionnement moyen du scintillateur nous lui attribuons une loi d'illumination $I(t)$ du type :

$$I(t) = \frac{R}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On peut admettre que $\frac{z}{R}$ représente grossièrement l'intervalle de temps qui sépare l'émission de deux photons consécutifs.

Supposons que :

$$\epsilon_{ph} < \lambda < \frac{z}{R}.$$

Les réponses du photomultiplicateur à chacun des photons émis sont distinctes et se succèdent dans le même ordre.

$$\epsilon_{ph} < \frac{z}{R} < \lambda.$$

Les réponses se succèdent dans le même ordre mais se chevauchent :

$$\frac{z}{R} < \epsilon_{ph} < \lambda.$$

Les réponses se chevauchent et peuvent se succéder dans un ordre différent de celui des photons correspondants.

Nous allons traiter ces trois cas séparément. Nous situerons toujours le scintillateur par rapport au photomultiplicateur c'est pourquoi nous traiterons respectivement de scintillateur très lent, lent et rapide.

D'autre part, dans notre étude, nous utiliserons un gain de photomultiplicateur normalisé. Si A_i est le gain réel nous appellerons g_i :

$$g_i = \frac{A_i}{A}$$

Il est évident que la valeur moyenne de g_i est $\bar{g} = 1$ et que sa variance est ϵ_A^2 .

III - 2 - SCINTILLATEUR TRES LENT

III-2-a - Variance de l'instant de collection d'une charge C donnée

Nous définirons C par $C = \sum_{i=1}^n g_i$

Il est évident que, pour C donné, Q est une variable aléatoire.

Nous allons estimer la fluctuation ΔQ de Q :

Soit $A(x)$ la fonction génératrice associée à la multiplication d'un photoélectron.

Considérons, d'abord, que nous avons un nombre fixe, Q , de photoélectrons. Sur l'anode nous recueillons un nombre d'électrons aléatoire C auquel nous associons la fonction génératrice $C(x)$.

Nous avons :

$$C(x) = [A(x)]^Q$$

et $\overline{C} = \text{valeur moyenne de } C = \overline{g} \cdot Q = Q$

$$\epsilon_c^2 = \text{variance de } C = Q \cdot \epsilon_A^2$$

La fluctuation de C autour de sa valeur moyenne peut s'estimer à :

$$\Delta C = \pm \frac{1}{2} \sqrt{Q} \cdot \epsilon_A$$

Si nous prenons le problème dans l'autre sens et, si nous considérons un nombre C , donné, d'électrons collectés par l'anode, Q devient un nombre aléatoire. Etant donné le gain moyen de 1 on peut facilement admettre que Q fluctue aussi autour de sa valeur moyenne de la quantité :

$$\Delta Q = \pm \frac{1}{2} \sqrt{Q} \cdot \epsilon_A \quad \text{ou que} \quad \epsilon_Q^2 = Q \cdot \epsilon_A^2$$

D'autre part, dans le domaine où nous nous sommes placés nous pouvons négliger la largeur λ de la réponse du multiplicateur. Nous prendrons donc une réponse du type :

$$A \propto (t - h)$$

Nous allons essayer maintenant d'analyser les causes de fluctuations de t_i :

1ère cause : Fluctuation de l'instant d'émission du $Q^{\text{ième}}$ photoélectron due au caractère statistique du phénomène. La variance de cette fluctuation sera appelée ϵ_1^2 .

2ème cause : Si $\bar{t}$ est l'instant moyen d'émission du $Q^{\text{ième}}$ photoélectron, $\bar{t}$ varie parce que Q varie. Soit ϵ_2^2 la variance correspondante.

3ème cause : Fluctuation du temps de transit correspondant au $Q^{\text{ième}}$ photoélectron.

Sa variance est ϵ_{ph}^2 .

On admettra que ces fluctuations sont indépendantes donc :

$$\epsilon_{t_i}^2 = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_{\text{ph}}^2$$

Calcul de ϵ_1^2 : ϵ_1^2 a été calculé par POST et SCHIFF (6)

$$\epsilon_1^2 = \bar{Q} \frac{v^2}{R^2} \left[1 + \frac{2(\bar{Q} + 1)}{R} + \dots \right]$$

en négligeant les autres termes de ce développement en $\frac{\bar{Q}}{R}$.

Calcul de ϵ_2^2 : Ces auteurs ont aussi calculé la valeur moyenne de l'instant d'émission du $Q^{\text{ième}}$ photoélectron.

$$\bar{t} = \frac{Qv}{R} \left(1 + \frac{Q+1}{2R} + \dots \right)$$

Nous allons en calculer la variance sachant que maintenant c'est Q qui est la variable aléatoire.

Tout d'abord :

$$\bar{t} = \frac{\bar{Q}v}{R} \left(1 + \frac{\bar{Q}+1}{2R} \right)$$

$$\epsilon_2^2 = \overline{t^2} - \bar{t}^2$$

$$\overline{t^2} = \int_0^\infty \left[\frac{Qv}{R} \left(1 + \frac{Q+1}{2R} \right) \right]^2 \cdot P(Q) dQ$$

si nous désignons par $P(Q)$ la densité de probabilité relative à Q .

En développant le terme au carré et en négligeant $\frac{Q^2}{R^2}$ devant 1 nous obtenons :

$$\overline{t^2} = \frac{v^2}{R^2} \left[1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{4R^2} \right] \cdot \int_0^\infty Q^2 P(Q) dQ + \frac{v^2}{R^2} \left(1 + \frac{1}{2R} \right) \int_0^\infty Q^3 P(Q) dQ$$

d'où :

$$\epsilon_2^2 = \frac{v^2}{R^2} \left[1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{4R^2} \right] \left[\overline{Q^2} - \bar{Q}^2 \right] + \frac{v^2}{R^2} \left[1 + \frac{1}{2R} \right] \left[\overline{Q^3} - \bar{Q}^3 \right]$$

soit λ_Q^3 le moment centré d'ordre 3 de Q on a :

$$\lambda_Q^3 = \overline{Q^3} - 3 \overline{Q} \cdot \overline{Q^2} + 2 \overline{Q}^3$$

sachant que $\overline{Q^2} = \epsilon_Q^2 + \overline{Q}^2$ on a :

$$\overline{Q^3} - \overline{Q}^3 = \lambda_Q^3 + 3 \epsilon_Q^2 \cdot \overline{Q}$$

On peut montrer à l'aide des fonctions génératrices que :

$$\lambda_Q^3 = \overline{Q} \cdot \lambda_A^3$$

où λ_A^3 est le moment centré d'ordre 3 du gain normé. Si nous supposons, comme dans le cas de la résolution en énergie, une distribution du gain à allure gaussienne :

$$\lambda_A^3 = 0$$

Il en résulte que :

$$\epsilon_Q^2 = \frac{v^2}{R^2} \epsilon_Q^2 \left[1 + \frac{1}{R} + \frac{3 \overline{Q}}{R} + \frac{1}{4R^2} + \frac{3 \overline{Q}}{2R^2} \right]$$

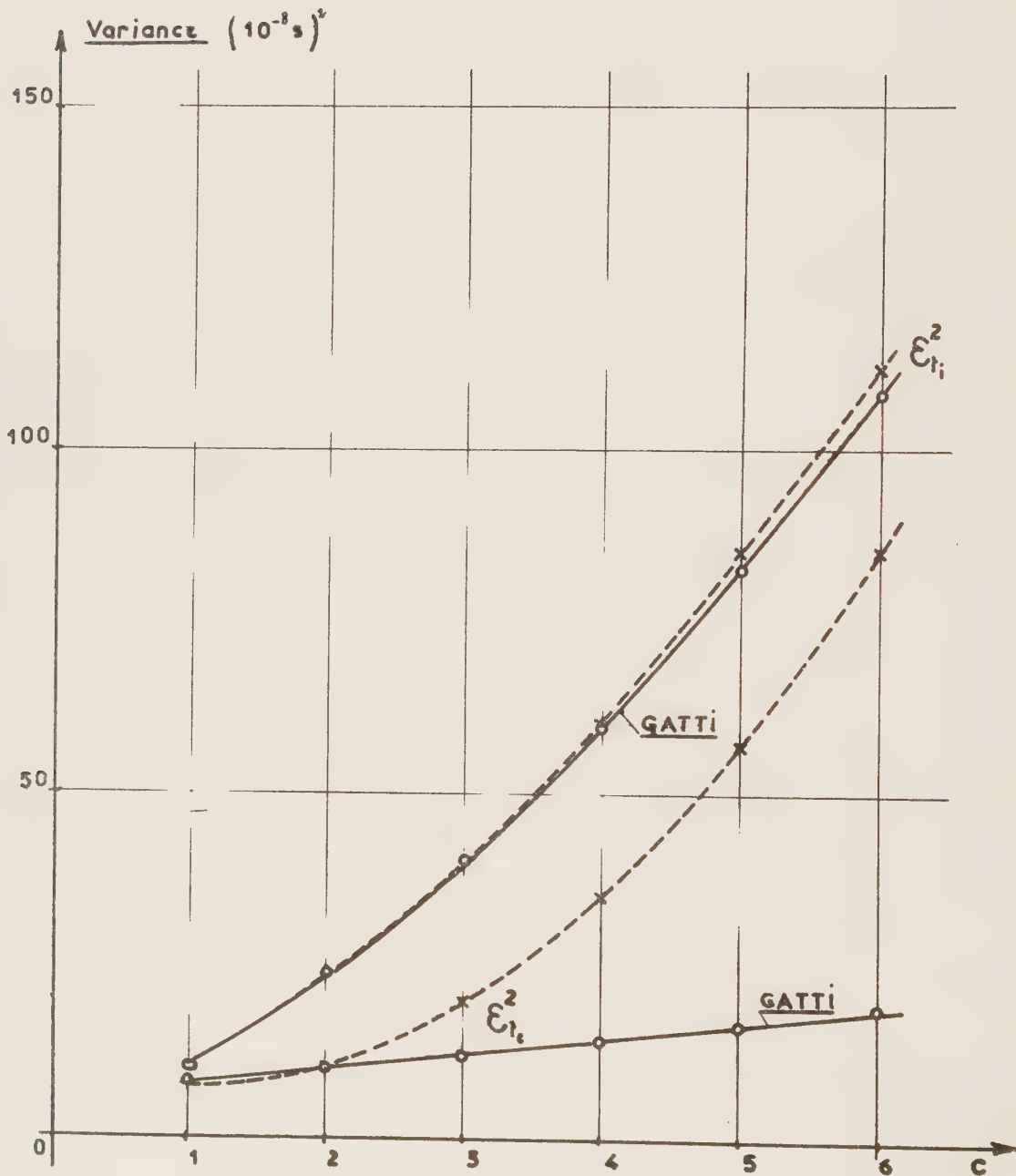
Nous avons négligé $\frac{\overline{Q^2}}{R^2}$ devant 1 or $\overline{Q} > 1$ donc :

$$\frac{1}{R^2} < \frac{\overline{Q}}{R^2} < \frac{\overline{Q}^2}{R^2}$$

et dans cette expression on peut négliger les termes en $\frac{1}{R^2}$.

$$\epsilon_Q^2 = \frac{v^2}{R^2} \epsilon_Q^2 \left(1 + \frac{3 \overline{Q} + 1}{R} \right)$$

$$\epsilon_Q^2 = \overline{Q} \cdot \frac{v^2}{R^2} \left(1 + \frac{3 \overline{Q} + 1}{R} \right) \epsilon_A^2$$

Figure 3

Résolution en temps

$$\epsilon_A^1 = 0,2$$

$$\lambda = 0,5$$

$$\tau = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$$

$$\epsilon_A^1 = 5 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

$$R = 10$$

Il résulte des calculs précédents que :

$$\epsilon_{t_i}^2 = \epsilon_{ph}^2 + \frac{\overline{Q} \tau^2}{R^2} \left[1 + \frac{2(\overline{Q}+1)}{R} + \epsilon_A^2 \cdot \left(1 + \frac{3\overline{Q}+1}{R} \right) \right]$$

ou, comme $C = Q$,

$$\epsilon_{t_i}^2 = \epsilon_{ph}^2 + \frac{C \tau^2}{R^2} \left[1 + \frac{2(C+1)}{R} + \epsilon_A^2 \cdot \left(1 + \frac{3C+1}{R} \right) \right]$$

Par une autre voie GATTI avait obtenu l'expression suivante (9)

$$\epsilon_{t_i}^2 = \epsilon_{ph}^2 + (1 + \epsilon_A^2) \cdot \frac{C \tau^2}{R^2} \cdot \left[1 + \frac{2(C+1)}{R} \right]$$

Nous avons pris un exemple parmi ceux cités par GATTI (9) :

Scintillateur lent : $\tau = 2,5 \cdot 10^{-7}$ s

Basse énergie : $R = 10$

Bon photomultiplicateur : $\epsilon_{ph} = 5 \cdot 10^{-10}$ s

$\lambda = 2 \cdot 10^{-9}$ s

$\epsilon_A^2 = 0,2$

Nous avons tracé la courbe donnant $\epsilon_{t_i}^2$ en fonction de C . Elle est pratiquement superposée à celle de GATTI (figure 3).

III-2-b - Variance du barycentre d'une charge C collectée :

Analysons de nouveau les causes de fluctuations de t_c .

1ère cause : Fluctuation du barycentre des Q premiers photoélectrons due au caractère statistique de l'émission photoélectronique. Variance correspondante: ϵ_1^2 .

2ème cause : Déplacement du barycentre dû au fait que chaque photoélectron subit une multiplication par un facteur aléatoire g_i . Variance correspondante: ϵ_2^2 .

3ème cause : La position moyenne de ce barycentre varie parce que Q varie. Variance: ϵ_3^2 .

4ème cause : Le barycentre se déplace parce que le temps de transit correspondant à chaque photoélectron varie. Variance: ϵ_4^2 .

On admettra que ces fluctuations sont indépendantes et :

$$\epsilon_{t_c}^2 = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2$$

Calcul de ϵ_1^2 : La variance ϵ_1^2 a été calculée par GATTI (7) dans le cas où z est grand devant t_c . On peut alors pratiquement admettre que la loi d'illumination est une constante :

$$I(t) = \frac{R}{z} \quad (t \geq 0)$$

On a :

$$\epsilon_1^2 = \frac{\overline{Q}}{3} \cdot \frac{z^2}{R^2} \cdot \left[1 + \frac{3}{2\overline{Q}} + \frac{1}{2\overline{Q}^2} \right]$$

Comme $\overline{Q} = C$

$$\epsilon_1^2 = \frac{C}{3} \cdot \frac{z^2}{R^2} \cdot \left[1 + \frac{3}{2C} + \frac{1}{2C^2} \right]$$

Calcul de ϵ_2^2 :

$$t_c = \frac{1}{\overline{Q}} \sum_{i=1}^{\overline{Q}} t_i$$

après amplification :

$$t'_c = \frac{\sum_{i=1}^{\overline{Q}} g_i \cdot t_i}{\sum_{i=1}^{\overline{Q}} g_i}$$

Calculons la variance de t'_c en assimilant ϵ_2 à $\left| dt'_c \right|$ valeur absolue de la différentielle de t'_c par rapport aux variables g_i .

$$\epsilon_2^2 = \left[\frac{\sum_{i=1}^{\overline{Q}} t_i}{\sum_{i=1}^{\overline{Q}} g_i} - \frac{\sum_{i=1}^{\overline{Q}} t_i}{\left(\sum_{i=1}^{\overline{Q}} g_i \right)} \right] \cdot \epsilon_A^2$$

ou :

$$\epsilon_2^2 = \left[\frac{\overline{Q} \cdot t_c}{C} - \frac{t'_c}{C} \right] \epsilon_A^2$$

Approximons t_c^1 par $t_c + \frac{\epsilon_2}{2}$ nous pouvons alors calculer ϵ_2 .

$$\text{On a : } \epsilon_2 = \epsilon_A \cdot \frac{t_c}{C} \cdot \frac{\overline{Q} - 1}{1 + \frac{\epsilon_A}{2C}}$$

Comme $C = \overline{Q}$ et $\frac{\epsilon_A}{2C}$ est petit devant 1,

$$\epsilon_2 \approx \epsilon_A \cdot t_c \cdot \frac{C - 1}{C}$$

$$\epsilon_2^2 = \epsilon_A^2 \cdot t_c^2 \cdot \left(\frac{C - 1}{C} \right)^2$$

Nous prendrons pour t_c la valeur moyenne $\overline{t_c}$ donnée par GATTI dans les calculs déjà cités (7).

$$\overline{t_c} = \frac{\overline{Q} + 1}{2} \cdot \frac{z}{R} = \frac{C + 1}{2} \cdot \frac{z}{R}$$

d'où :

$$\epsilon_2^2 = \epsilon_A^2 \cdot \frac{z^2}{4R^2} \cdot \left(\frac{C^2 - 1}{C} \right)^2$$

Calcul de ϵ_3^2 :

$$\text{Nous avons } \overline{t_c} = \frac{Q + 1}{2} \cdot \frac{z}{R}$$

d'où :

$$\epsilon_3^2 = \frac{z^2}{4R^2} \cdot \epsilon_Q^2$$

$$\epsilon_3^2 = \frac{z^2}{4R^2} \cdot \overline{Q} \cdot \epsilon_A^2 = \frac{z^2}{4R^2} \cdot C \cdot \epsilon_A^2$$

•

Calcul de ϵ_4^2 :

Après que l'influence des fluctuations de temps de transit se soit fait sentir l'abscisse du barycentre s'exprime par :

$$t_c^1 = \frac{1}{C} \cdot \sum_{i=1}^{\bar{q}} (t_i + h_i)$$

La fluctuation porte sur la variable aléatoire h_i et nous avons :

$$\epsilon_4^2 = \frac{\epsilon_{ph}^2}{C}$$

Il en résulte que :

$$\epsilon_{t_c}^2 = \frac{\epsilon_{ph}^2}{C} + \frac{C z^2}{R^2} \cdot \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2C} + \frac{1}{2C^2} \right) + \frac{\epsilon_A^2}{4} \cdot \left\{ \left(\frac{C^2-1}{C} \right)^2 + 1 \right\} \right]$$

On comparera avec la formule de GATTI (8)

$$\epsilon_{t_c}^2 = \frac{\epsilon_{ph}^2}{C} (1 + \epsilon_A^2) \frac{C}{3} \frac{z^2}{R^2} \left[1 + \frac{3}{2C} + \frac{1}{2C^2} \right]$$

En utilisant le même exemple numérique que précédemment nous avons tracé les courbes donnant $\epsilon_{t_c}^2$ en fonction de C. Au sujet de l'écart important que l'on peut constater, on ne peut se prononcer, les formules résultant d'approximations différentes. Cependant on peut considérer que, dans nos calculs, l'approximation la plus grossière consiste à admettre l'indépendance des quatre causes de fluctuations. Cette approximation a aussi été admise par GATTI.

III - 3 - SCINTILLATEUR LENT

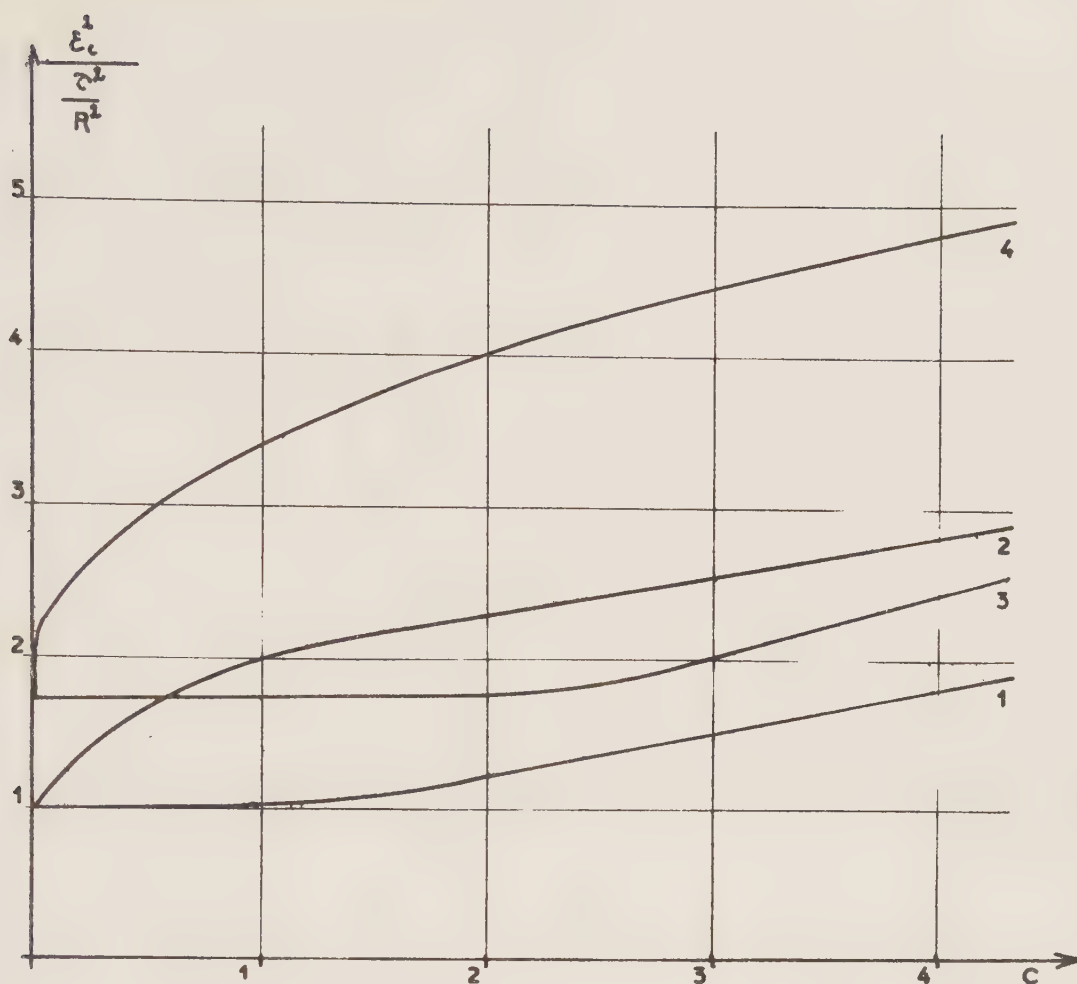
Il nous faut tenir compte de la largeur de la réponse du multiplicateur.

Les calculs sont beaucoup moins simples et E. GATTI, A. DE MATTEIS et ARECCHI F. T. (9) ont dû avoir recours à la méthode de Monte Carlo pour résoudre le problème.

Ils se sont placés dans les conditions suivantes :

- Loi d'illumination constante $I(t) = \frac{R}{z}$
- Distribution exponentielle des temps de transit
- Réponse du multiplicateur en $\frac{3}{8! \lambda} \left(\frac{3t}{\lambda} \right)^8 \exp \left(- \frac{3t}{\lambda} \right)$

Nous donnons figure 4 les courbes qu'ils ont obtenues.



RESOLUTION EN TEMPS

COURBES DE GATTI (9)

1 -	$\lambda = 0$	$\varepsilon_{ph} = 0$	$\varepsilon_A^2 = 0$
2 -	$\frac{\lambda R}{\tau} = 8$	$\frac{\varepsilon_{ph} R}{\tau} = 0$	$\frac{\lambda}{\varepsilon_{ph}} = \infty$ $\varepsilon_A^2 = 0$
3 -	$\frac{\lambda R}{\tau} = 0$	$\frac{\varepsilon_{ph} R}{\tau} = 2$	$\frac{\lambda}{\varepsilon_{ph}} = 0$ $\varepsilon_A^2 = 0$
4 -	$\frac{\lambda R}{\tau} = 8$	$\frac{\varepsilon_{ph} R}{\tau} = 2$	$\frac{\lambda}{\varepsilon_{ph}} = 4$ $\varepsilon_A^2 = 0,5$

Figure 4

4. SCINTILLATEUR RAPIDE

Ce cas a été aussi étudié par E. GATTI et V. SVELTO (8).

La méthode de calcul consiste à admettre que toute fluctuation se traduit par une perturbation de l'effet moyen.

Comme il est difficile, dans ce cas, de dissocier les effets des fluctuations de temps de transit de celles du gain, E. GATTI et V. SVELTO, dans une étude récente (11), définissent une loi d'illumination équivalente :

$$I^*(t) = I(t) * p(t)$$

où $p(t)$ est la distribution des temps de transit.

Le courant recueilli par l'anode s'exprimera par :

$$i(t) = f(t) * I^*(t)$$

On considère que toute fluctuation se produisant à l'instant σ se traduit par une perturbation telle que le nouveau courant est :

$$i(t) = f(t) * I^*(t) + \Delta K \cdot f(t - \sigma)$$

On peut alors calculer les modifications apportées à t_i ou à t_c en fonction de ΔK et relier ΔK à une fluctuation du gain, de λ ou de l'émission photoélectronique.

Nous donnons en figure 5 les résultats obtenus dans les conditions suivantes :

- Loi d'illumination $I(t) = \frac{R}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

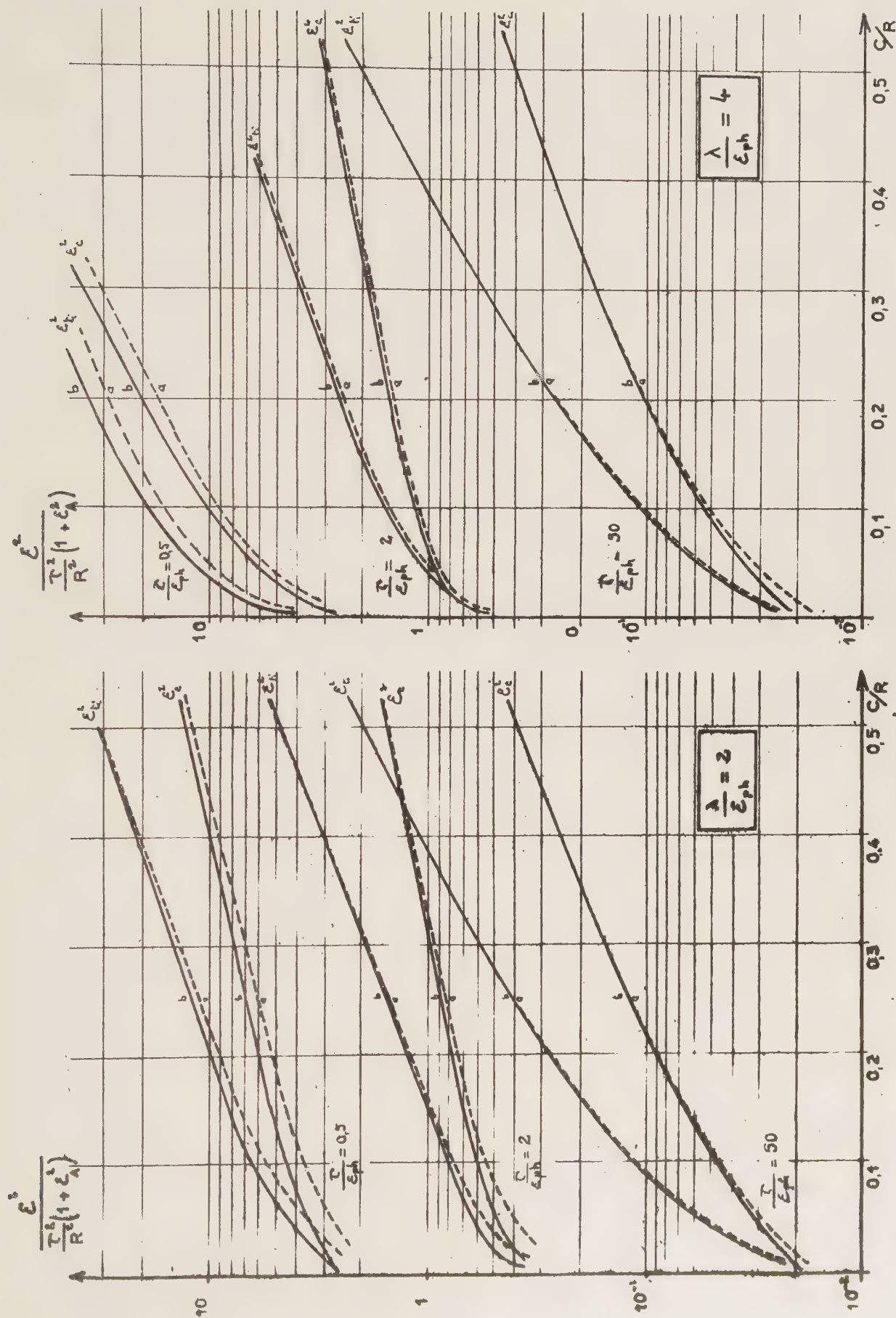
- Distribution des temps de transit :

$$p_1(t) dt = \frac{1}{\epsilon_{ph}} \exp\left(-\frac{t}{\epsilon_{ph}}\right) \quad (\text{courbes a})$$

$$p_2(t) dt = \frac{2}{\epsilon_{ph}^2} \cdot t \exp\left(-\frac{t\sqrt{2}}{\epsilon_{ph}}\right) \quad (\text{courbes b})$$

- Réponse percussive du multiplicateur :

$$f(t) = \frac{3}{8! \lambda} \left(\frac{3t}{\lambda}\right)^8 \exp\left(-\frac{3t}{\lambda}\right)$$



RESOLUTION EN TEMPS COURBES DE GATTI (11)

Figure 5

On remarquera que ces courbes ne présentent aucun minimum. Pour avoir la meilleure résolution il faut donc tendre vers un C/R minimal et, évidemment, utiliser un photomultiplicateur pour lequel λ et ϵ_{ph} sont les plus petits possibles.

Dans ce chapitre nous avons essayé de calculer la résolution du photomultiplicateur. Nous avons vu que dans tous les cas le problème le plus important était de définir une réponse percussionnelle du multiplicateur d'électrons. Dans le premier cas, considérer que la réponse du scintillateur est lente devant celle du photomultiplicateur revient à négliger les effets de celui-ci, dans les autres cas nous avons vu que GATTI et ses collaborateurs (6, 7, 8, 9, 10) ont été contraints d'utiliser une forme empirique et des paramètres statistiques dont les valeurs sont fixées arbitrairement de manière à concorder au mieux avec les résultats expérimentaux connus.

On ne pourra donc avoir une connaissance précise de la résolution en temps du photomultiplicateur qu'en déterminant de façon plus précise les caractéristiques de la réponse percussionnelle du multiplicateur. C'est ce que nous tentons de faire dans la deuxième partie. Nous utilisons pour cela une méthode de calcul par simulation sur calculateur électronique : la méthode de Monte Carlo.

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DE LA REPONSE DU PHOTOMULTIPLICATEUR A UN SEUL

PHOTOELECTRON PAR SIMULATION SUR CALCULATEUR

- IV - Exposé de la méthode de Monte Carlo.
- V - Modèle statistique du photomultiplicateur.
- VI - Simulation du fonctionnement du photomultiplicateur :
Programmes.
- VII - Simulation du fonctionnement du photomultiplicateur :
Résultats.

CHAPITRE IV

LA METHODE DE MONTE CARLOIV - 1 - GENERALITES

La méthode de Monte Carlo est principalement utilisée pour simuler un ensemble d'événements statistiques.

Considérons un événement E_0 , il a pour résultats r_i ($i = 1, \dots$). A chacun d'eux correspondent d'autres événements statistiques E_i dont les résultats sont r_{ij} . L'enchaînement des événements peut se poursuivre et on arrive vite à une complexité telle que les lois statistiques auxquelles obéit le résultat final sont pratiquement impossibles à déterminer même si les lois relatives à E_0 et aux E_i sont simples.

Grâce à la méthode de Monte Carlo, il est possible de simuler cet enchaînement d'événements.

Partons de l'événement initial E_0 . La distribution du résultat de l'épreuve est connue. En la générant en calculateur, on peut obtenir r_i comme si E_0 avait réellement eu lieu. Nous connaissons par conséquent l'événement E_i mis en cause et la distribution des r_{ij} . Par le procédé de génération nous pouvons connaître r_{ij} et, ainsi de suite, nous continuons la simulation jusqu'à l'obtention du résultat final R .

Si nous partons de nombreuses fois de E_0 pour arriver à R nous obtenons une série de valeurs qui représente la distribution cherchée du résultat final.

La méthode est très simple. Malheureusement une simulation comporte bien souvent un grand nombre de générations et une statistique correcte nécessite un grand nombre de simulations. On est donc bien souvent limité par la rapidité du

calculateur et la capacité de sa mémoire.

De nombreux problèmes sont résolus par cette méthode, nous citerons par exemple :

Problèmes de files d'attente. (12)

Gestion de stocks (12).

Ralentissement des neutrons dans une pile.

Etude de phénomènes de cascades en physique nucléaire (12).

On signalera en outre que la méthode de Monte Carlo permet de calculer certaines équations intégrales (14).

IV - 2 - GENERATION DE DISTRIBUTIONS STATISTIQUES

IV-2-a - Distribution uniforme

Un excellent exemple de distribution uniforme est donné par la suite des nombres de cinq chiffres, obtenue par tirage à la loterie nationale. Chacun d'eux à la probabilité 10^{-6} de sortir.

Une telle distribution est d'un usage constant dans la méthode de Monte Carlo. Cependant, dans une simulation, les suites utilisées comportent facilement plusieurs milliers de nombres. Introduire en mémoire les tirages successifs de la loterie nationale conduirait vite à la saturation. C'est une méthode impraticable.

On peut, cependant, avoir recours à des procédés mathématiques qui permettent d'obtenir une suite de nombres dont les propriétés statistiques sont identiques à celles d'une suite issue d'une distribution uniforme. Citons les méthodes les plus employées.

- La méthode du "mid square" (12) :

Soit X_n un nombre de a chiffres de la suite, X_{n+1} s'obtient en prenant les a chiffres de milieu de X_n^2 .

- Les suites de Fibonacci (12) :

Soient X_n et X_{n+1} deux nombres consécutifs de la suite. On a :

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n \quad (\text{modulo } N)$$

~ La méthode des congruences pures (15) :

$$X_{n+1} = k \cdot X_n \pmod{N}$$

où k est une constante.

~ La méthode des congruences mixtes (15) :

$$X_{n+1} = k \cdot X_n + b \pmod{N}$$

où k et b sont des constantes.

Ces nombres ainsi générés sont dits pseudo aléatoires, car, en fait, il existe une liaison bien précise entre deux nombres consécutifs. Il est donc très important de bien choisir la valeur des paramètres et, surtout, il est nécessaire de tester la génération pour savoir si les propriétés statistiques de la suite des nombres obtenus sont bien celles d'une distribution uniforme.

Différents tests sont possibles nous citerons le plus couramment employé : Le test du X^2 .

Le test du X^2 :

Soit une distribution uniforme. Les nombres obtenus peuvent être rangés dans n classes distinctes. Soit p_i la probabilité pour qu'un nombre de la classe i soit obtenu. Considérons alors une suite de N nombres de cette distribution. Dans la classe i nous en avons n_i . n_i n'est pas forcément égal à Np_i ; il existe un écart de nature statistique entre ces deux valeurs.

On peut calculer la distribution de la grandeur :

$$X^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

suivant la valeur de n . (On a en outre $n = \nu + 1$ avec ν = nombre de degrés de liberté). Soit $p(X^2)$ la densité de probabilité.

Si nous voulons tester une génération de nombres pseudo aléatoires nous en calculons le X^2 pour un nombre de classe n donné.

Soit X^2_0 le résultat.

Soit P la probabilité pour que $X^2 > X^2_0$ dans une distribution du X^2 à $(n - 1)$ degrés de liberté.

Si $P < 1\%$ le test est négatif. Le procédé de génération est mauvais.

Si $P \leq 5\%$ On ne peut se prononcer.

Si $P > 5\%$ On admet que la génération est correcte.

EV-2-b - Distribution statistique quelconque :

Considérons une distribution quelconque D d'une variable aléatoire discrète X. Nous avons la probabilité p_i pour que X prenne la valeur i.

$$\sum_{i=0}^N p_i = 1$$

Soit alors E l'ensemble des nombres x pouvant être obtenus par une distribution uniforme. Subdivisons cet ensemble en N sous ensembles disjoints E_i tels que la réunion de tous les E_i recouvre l'ensemble E et que chaque E_i comporte n_i nombres ; n_i proportionnel à p_i :

Soit K le nombre des valeurs possibles pour x.

$$\text{On a } K = \sum_{i=0}^N n_i$$

$$\text{Posons } n_i = \alpha \cdot p_i$$

$$K = \sum_{i=0}^N \alpha \cdot p_i = \alpha$$

d'où :

$$n_i = K \cdot p_i$$

Soit x un nombre généré, la probabilité pour qu'il fasse partie de l'ensemble E_i est :

$$\frac{n_i}{K} = p_i$$

Nous avons là un procédé de génération d'une distribution quelconque.

A x nous avons pu associer la variable i de la distribution D et passer d'une distribution uniforme à une distribution quelconque.

Si X est une variable aléatoire continue nous pouvons utiliser le même procédé en approximant la densité de probabilité p(x) par une fonction en escalier.

Ce procédé de génération d'une distribution quelconque est simple et une judicieuse répartition des ensembles E_i , comme le montre MARSAGLIA (16), per-

met de le rendre très rapide.

Mais il en existe d'autres. Nous en citerons deux, qui sont valables dans des cas bien précis et que nous avons utilisés dans notre procédé de simulation.

— Cas d'une variable aléatoire continue :

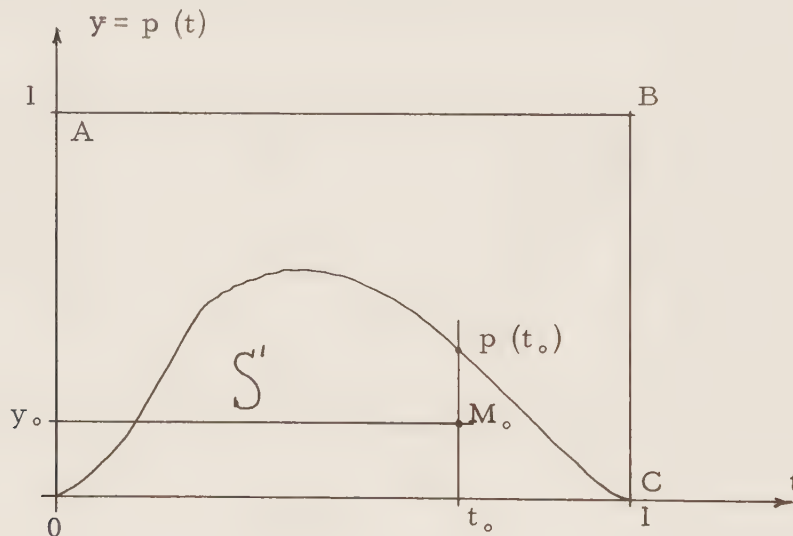
La densité de probabilité est $p(x)$ telle que :

$$p(x) = 0 \quad \forall x \leq a$$

$$p(x) = 0 \quad \forall x \geq b$$

$$\int_a^b p(x) dx = 1$$

Considérons la figure suivante obtenue à partir de $p(x)$ en faisant le changement de variable $t = \frac{a-x}{a-b}$



A partir d'une distribution uniforme nous obtenons t_0 et y_0 les coordonnées de M_0 . Par définition de la densité de probabilité, générer la distribution cherchée revient à prendre un point au hasard dans $0 A B C$, à rejeter ceux qui tombent en dehors de S' et conserver les autres.

Ceci revient à la séquence suivante :

1. Génération de t_0 .

2. Génération de y_0 .

$y_0 \leq p(t)$ t_0 nombre conservé.

$y_0 > p(t_0)$ t_0 rejeté on recommencera la séquence.

x_0 nombre que l'on veut générer s'obtient alors facilement à partir de t_0 .

Cette méthode est la méthode de Von NEUMAN (13).

- Cas d'une distribution de Poisson de paramètre m (15) :

Soit x_n une suite de nombres au hasard $0 \leq x_n < 1$.

Si x_1 le premier nombre généré est plus grand que e^{-m} , on génère x_2 .

Si $x_1 \cdot x_2$ est plus grand que e^{-m} , on génère x_3 .

On procède ainsi jusqu'à ce que :

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_j < e^{-m}.$$

On montre que la distribution des $(j-1)$ obéit à une distribution de Poisson de paramètre m .

CHAPITRE V

MODELES STATISTIQUES DU PHOTOMULTIPLICATEUR

Nous avons vu dans la première partie l'importance que prend la connaissance de la réponse percussionnelle du multiplicateur dans le calcul de la résolution en énergie et en temps.

Nous allons, dans ce chapitre, analyser les différentes causes de fluctuations aléatoires dans le but de définir un modèle statistique du photomultiplicateur. Nous pourrons alors en simuler le fonctionnement.

La nature statistique de la réponse percussionnelle est due à trois causes principales.

1. Les fluctuations du coefficient d'émission secondaire.
2. Les fluctuations de temps de transit.
3. Les pertes de collection.

V - 1 - LE COEFFICIENT D'EMISSION SECONDAIRE :

On admet généralement que le coefficient d'émission secondaire δ obéit à une loi de Poisson.

Van der Ziel (18) donne une justification de cette hypothèse :

Soit un électron incident, il libère à l'intérieur du métal n électrons qui ont une probabilité p de s'échapper. Le nombre des électrons secondaires émis est donc distribué suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Cette loi devient une loi de Poisson de paramètre np si n est grand et p petit.

Partant d'une telle hypothèse F. LOMBARD et J. MARTIN (4) ont calculé

la distribution du gain du multiplicateur (figure 6).

Beaucoup d'expérimentateurs ont essayé à l'aide de ce résultat de vérifier l'hypothèse de la loi de Poisson. Dans certains cas, ils n'ont pas trouvé une distribution présentant un maximum. C'est le cas des auteurs du calcul qui émettaient alors l'hypothèse d'une distribution exponentielle pour ∂ .

Par contre, d'autres expérimentateurs comme GAZIER et BRAULT (3) (figure 7) ou KERNS et QUENTIN (12) ont obtenu une forme semblable à celle calculée par F. LOMBARD et J. MARTIN. Cependant un écart notable existe toujours entre les caractéristiques statistiques de la distribution expérimentale et celle de la distribution théorique.

Il semblerait que cet écart soit surtout dû au fait que le calcul théorique ne tient pas compte des pertes de collection.

Des travaux récents de BAY et PAPP (20) apparaissent, cependant, comme une bonne vérification de la loi de POISSON. Leurs expériences tiennent compte des pertes de collection et l'étude du coefficient ∂ se fait au niveau de la dynode et non après multiplication.

On remarquera que l'adoption de l'hypothèse de la loi de POISSON conduit à un calcul simple de la variance relative v_G du multiplicateur qui intervient dans le calcul de la variance en énergie.

On a :

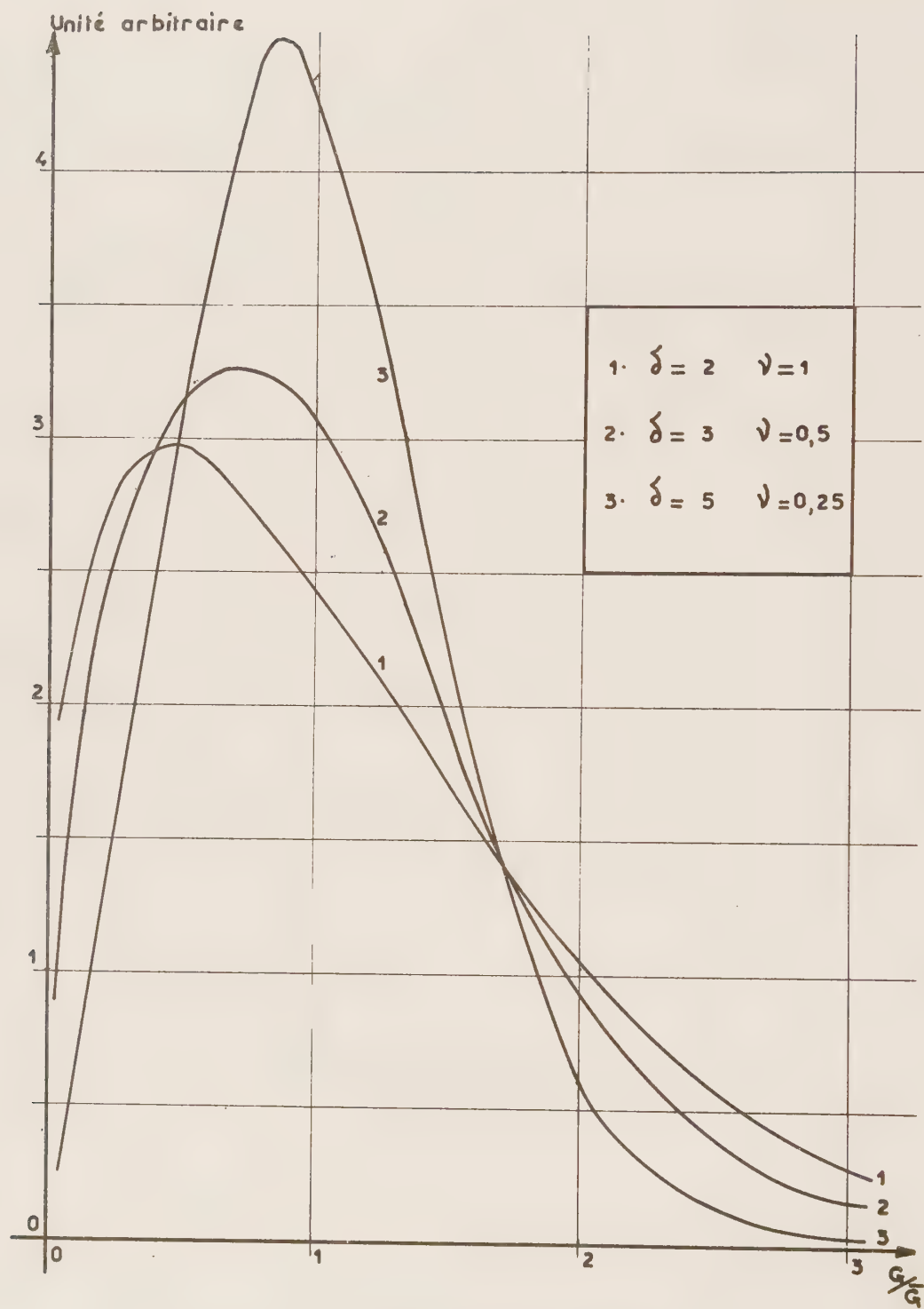
$$v_G = \frac{1}{\partial_1} + \frac{1}{\partial_1 \cdot \partial_2} + \dots + \frac{1}{\partial_1 \cdot \partial_2 \dots \partial_n}$$

Avec ∂_i coefficient de multiplication de la dynode i .

Si : $\partial_2 = \partial_3 = \dots = \partial_n$ et n grand,

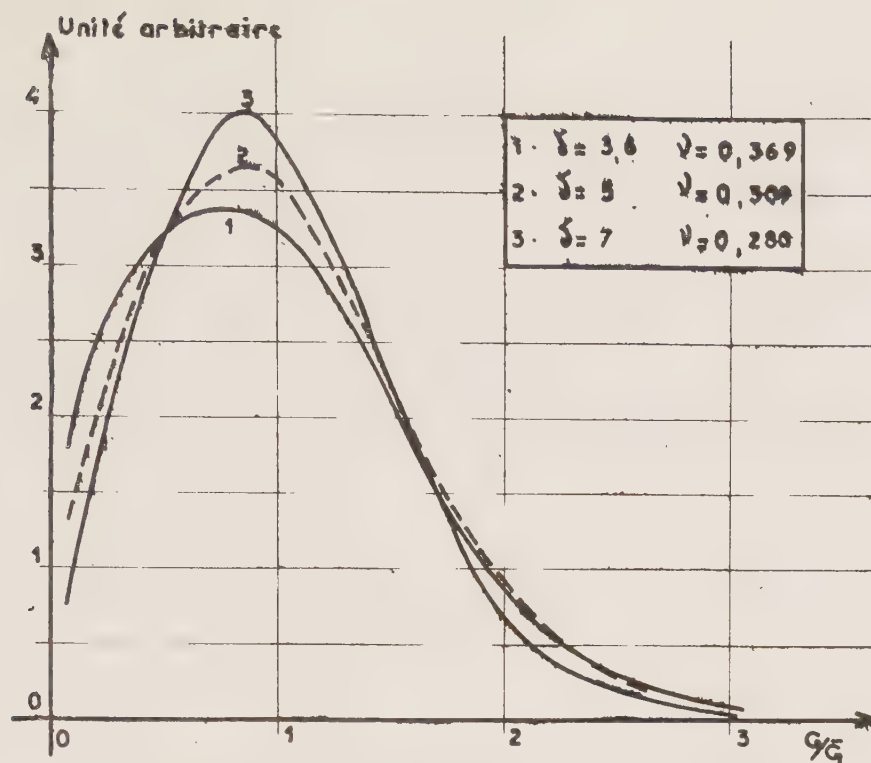
$$v_G = \partial / \partial_1^{(n-1)}.$$

Cette formule montre l'importance de la première dynode et l'intérêt qu'il y a à avoir sur D_1 un coefficient d'émission secondaire élevé.

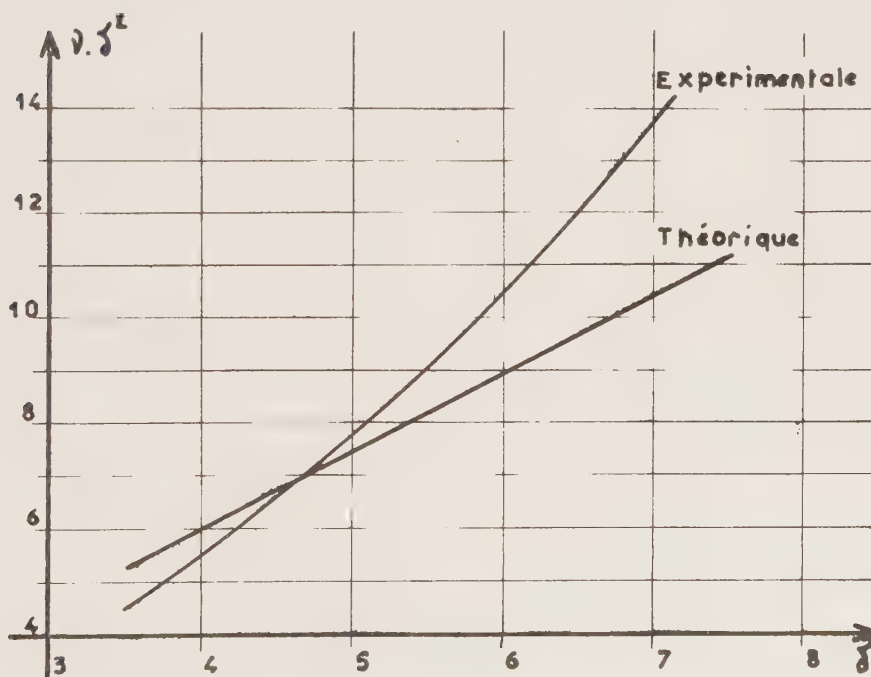


DISTRIBUTIONS THEORIQUES DU GAIN

Figure 6



a. DISTRIBUTIONS EXPERIMENTALES DU GAIN



b. COMPARAISON DES RESULTATS EXPERIMENTAUX ET THEORIQUES.

Figure 7

V - 2 - FLUCTUATIONS DES TEMPS DE TRANSIT

Nous considérerons l'optique d'entrée et un espace interdynode.

V-2-a - Optique d'entrée :

Chacun des photoélectrons émis possède une vitesse initiale dont la direction et le module sont des grandeurs aléatoires. Les fluctuations de temps de transit sont le résultat de ce caractère statistique.

On peut montrer expérimentalement, qu'étant donné la géométrie de révolution de l'optique d'entrée, les variations de la composante de la vitesse perpendiculaire à l'axe de révolution ont un effet négligeable sur le temps de transit. (21)

On ne tient donc compte, pratiquement, que de la distribution des composantes de la vitesse parallèles à l'axe. BARBIER (22) et G. PIETRI (21) admettent une distribution Maxwellienne des vitesses et en déduisent la distribution des temps de transit.

D'autres auteurs ont approximé la distribution des temps de transit par des lois simples : L. L. HYMANN, R. M. SCHWARCZ et R. A. SCHLUTER (23) admettent dans leur calcul de simulation une distribution gaussienne tandis que M. A. EL WAHAB et J. V. KANE (24) utilisent une distribution exponentielle.

Dans le but d'essayer ces différentes hypothèses nous avons procédé à des simulations avec deux modèles statistiques du photomultiplicateur.

Simulation 1 - La distribution des temps de transit est gaussienne suivant les hypothèses de L. HYMANN, R. M. SCHWARCZ et R. A. SCHLUTER (23).

Simulation 2 - La distribution des vitesses est maxwellienne comme l'envisage M. BARBIER (22).

V-2-b - Espace interdynode :

Chacun des électrons secondaires émis possède lui aussi une vitesse aléatoire mais il est plus difficile d'en évaluer les effets sur le temps de transit.

La géométrie des dynodes intervient et, suivant le point d'émission, les trajectoires peuvent avoir des longueurs très différentes pour une même vitesse initiale.

Citons, en exemple, un cas précis où cet effet se fait surtout sentir : dans l'intervalle $D_1 D_2$ du photomultiplicateur 56 AVP de la Société Radiotechnique. Les photoélectrons arrivent sur D_1 avec une direction à peu près axiale ; les électrons secondaires doivent alors avoir des trajectoires très courbées pour atteindre D_2 . Dans les autres espaces interdynodes, les trajectoires sont plus tendues car les dynodes sont presque en face les unes des autres. Il en résulte que le temps de transit moyen et son écart-type sont beaucoup plus grands dans l'intervalle $D_1 D_2$ que dans les autres espaces interdynodes.

On ne possède que très peu de connaissances sur les caractéristiques des distributions des temps de transit. On admet souvent des lois simples comme la loi de Gauss (20) ou une loi en :

$$p(t) dt = \frac{2\pi t}{a} \cdot e^{-\frac{\pi t^2}{a^2}} \cdot \frac{dt}{a} \quad \text{où} \quad \frac{a}{2} \text{ est la valeur moyenne}$$

Dans nos deux programmes de simulation nous avons utilisé les distributions suivantes :

Simulation 1 - Loi de Gauss identique pour tous les espaces interdynodes.

Simulation 2 - Loi en $\frac{2\pi t}{a} e^{-\frac{\pi t^2}{a^2}} \cdot \frac{dt}{a}$.

avec une valeur moyenne $\frac{a}{2}$ dans l'intervalle $D_1 D_2$ le double de celle des autres intervalles interdynodes.

V-2-c - Le rendement de collection :

Tant dans l'optique d'entrée que dans les intervalles interdynodes l'effet focalisateur n'est pas parfait. Certains électrons sont émis avec des vitesses telles qu'ils n'atteignent pas l'électrode suivante.

Il est aussi très difficile de préciser de quelle façon se produisent ces pertes. Généralement, on en tient compte en définissant un rendement de collection qui traduit la valeur moyenne du rapport du nombre d'électrons collectés par une dynode sur le nombre d'électrons émis par l'électrode précédente.

Dans les modèles statistiques que nous avons utilisés nous n'avons pas tenu compte des pertes de collection.

CHAPITRE VI

SIMULATION DU FONCTIONNEMENT DU PHOTOMULTIPLICATEUR

PROGRAMMES

Le problème de la simulation du fonctionnement du photomultiplicateur se pose de la façon suivante :

Le début de l'épreuve consiste dans l'émission à partir du centre de la photocathode d'un photoélectron. Le résultat est la distribution en temps et en nombre des électrons sur l'anode.

La figure 8 montre l'enchaînement des événements.

Le photoélectron atteint D_1 à l'instant t_1 . Il y a multiplication et δ_1 électrons se dirigent vers D_2 . Ils atteignent cette dynode à des instants obtenus en ajoutant à t_1 les différents temps de transit dans l'espace $D_1 D_2$. Pour chacun des δ_1 électrons nous avons une multiplication sur D_2 . La distribution sur D_3 sera obtenue en additionnant les temps de transit des électrons secondaires dans l'espace $D_2 D_3$ à l'instant d'arrivée sur D_2 de l'électron primaire correspondant. Tout se continue de la même façon jusqu'à l'anode.

En fait la simulation directe jusqu'à l'anode est pratiquement impossible. Si nous considérons le 56 AVP, nous avons un gain de 10^8 . Il faudra donc considérer sur l'anode 10^8 électrons et multiplier ce nombre par 100, au moins, pour avoir une statistique correcte. Il est impossible de traiter un tel volume de données dans un calculateur, il est donc nécessaire de fractionner le processus des simulations.

La structure même du photomultiplicateur nous invite d'ailleurs à ce fractionnement et nous pourrions procéder de la façon suivante :

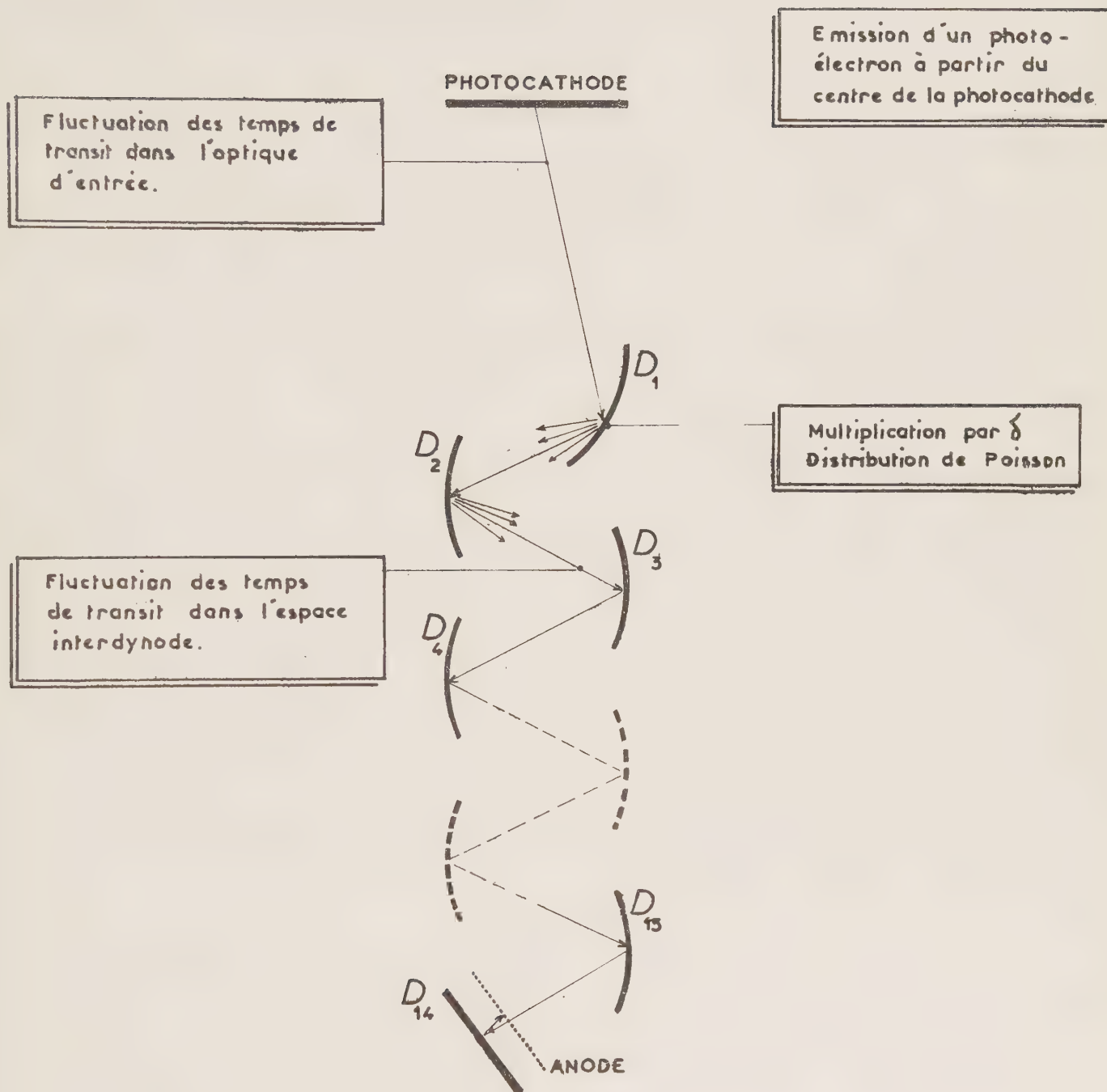


Figure 8

1 - Simulation de l'optique d'entrée.

Pour chaque photoélectron émis nous obtenons l'instant de son arrivée sur D_1

2 - Simulation d'un espace interdynode (D_i, D_{i+1}).

Les données sont les instants d'arrivée t_{ij} des électrons sur D_i . Il y a multiplication et pour chaque électron secondaire émis vers D_{i+1} on génère un temps de transit qu'on ajoute au t_{ij} correspondant. Le résultat est les instants d'arrivée sur D_{i+1} .

Il est évident qu'en combinant ces deux programmes on progresse de dynode en dynode jusqu'à l'anode.

L'intérêt du procédé est qu'on ne demande pas à la mémoire du calculateur de stocker beaucoup d'informations. La mémoire principale est la carte perforée. Par contre le problème de la rapidité continue à se poser et pratiquement on peut considérer que la sixième dynode constitue une limite de ce qu'on peut atteindre par ce procédé.

Mais on peut, cependant, envisager de considérer le photomultiplicateur comme un ensemble de plusieurs éléments de quatre ou cinq dynodes. La simulation permet de connaître la réponse percussionnelle de chacun de ses éléments. En combinant ces réponses nous pouvons calculer les réponses globales sur l'anode.

Notre travail a donc porté sur la simulation du fonctionnement du photomultiplicateur jusqu'à la dynode 5.

Nous avons procédé à deux simulations :

Dans la première, le modèle statistique choisi est particulièrement simple : tous les temps de transit suivent la même loi gaussienne et toutes les multiplications se font suivant la loi de Poisson de paramètre 3.

La deuxième simulation est plus proche de la réalité. Elle tient compte des différences de distribution des temps de transit dans l'optique d'entrée, dans l'espace $D_1 D_2$, dans les autres espaces interdynodes. De même, la première dynode est affectée d'un coefficient de multiplication suivant une loi de Poisson de paramètre 8 tandis que le paramètre relatif aux autres dynodes est 3.

Pour les deux simulations la génération des nombres pseudoaléatoires se fait suivant la méthode des congruences pures :

$$X_{n+1} = k \cdot X_n \pmod{N}$$

Avec les valeurs suivantes :

$$k = 23$$

$$M = 10^8 + 1$$

$$X_0 = 48\,035\,888$$

Cette génération a été testée par J. GREA et R. LAVERRIERE (25) et a donné de bons résultats. Le nombre utilisé est constitué par les quatre derniers chiffres de X_n .

VI - 1 - SIMULATION 1

VI-1-a - Simulation de l'optique d'entrée et de l'espace D_1 - D_2 :

Les résultats sont les instants d'arrivée sur la dynode 2 des électrons relatifs à un photoélectron dont le numéro de référence est mentionné sur la carte perforée de sortie (figure 9).

La distribution des temps de transit est la même pour les deux espaces interélectrodes. C'est une distribution de Gauss tronquée (23).

$$p(t) dt = \frac{1,1125}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left\{ \frac{35}{32} \exp \left[-\frac{(t - 2,2166\sigma)^2}{2\sigma^2} \right] - \frac{3}{32} \right\}$$

$$p(t) = 0 \quad t \leq 0 \quad \text{ou} \quad t \geq 4,4332\sigma.$$

$$\sigma = 1 \text{ ns.}$$

La valeur moyenne est 2,2166 ns.

La variance est 1 (ns)^2 .

Cette distribution est générée par la méthode de Von NEUMANN.

Le coefficient de multiplication obéit à une loi de Poisson de paramètre 3 dont la génération se fait par la méthode du produit.

SIMULATION 1 Programme 1

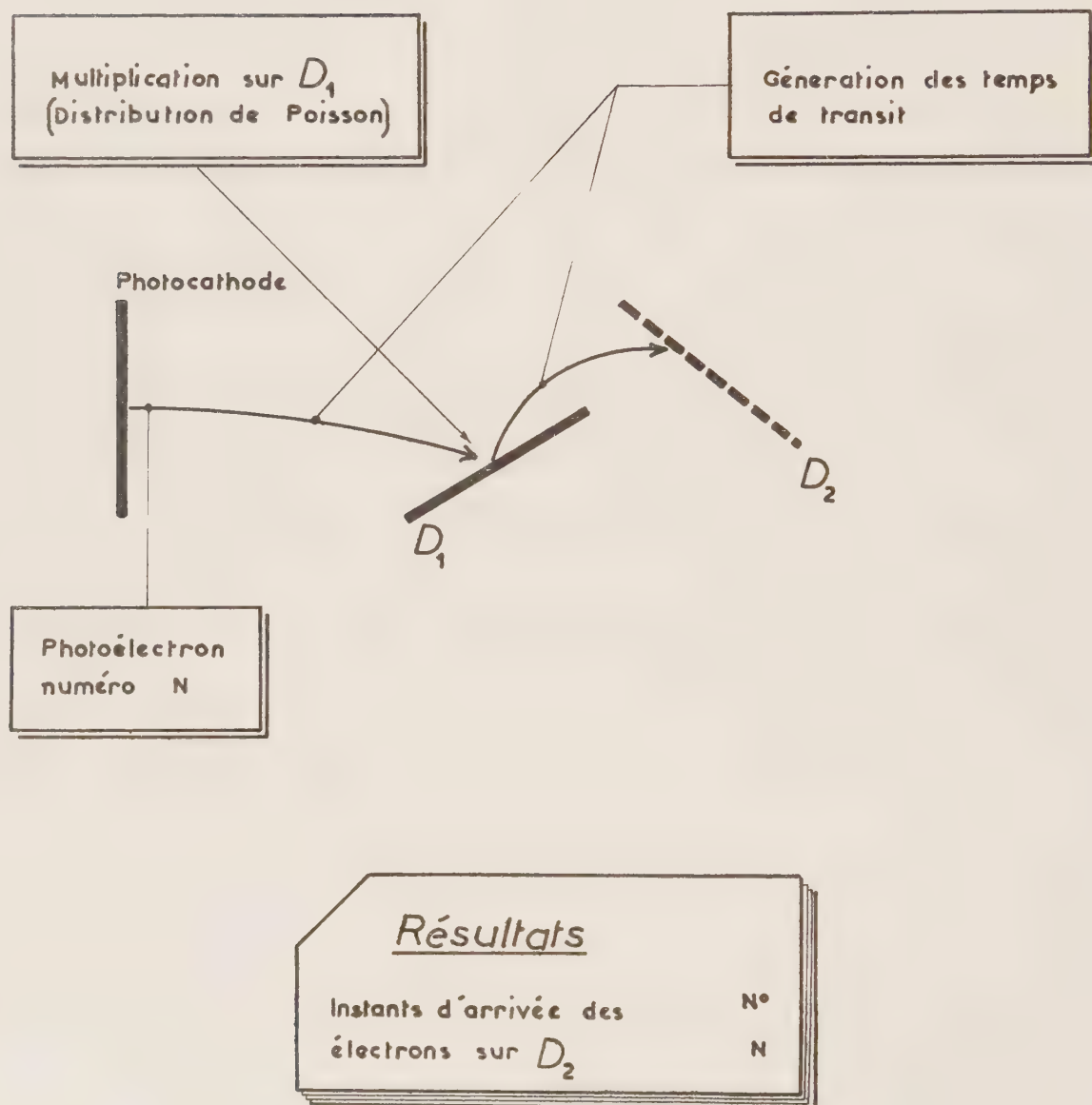


Figure 9

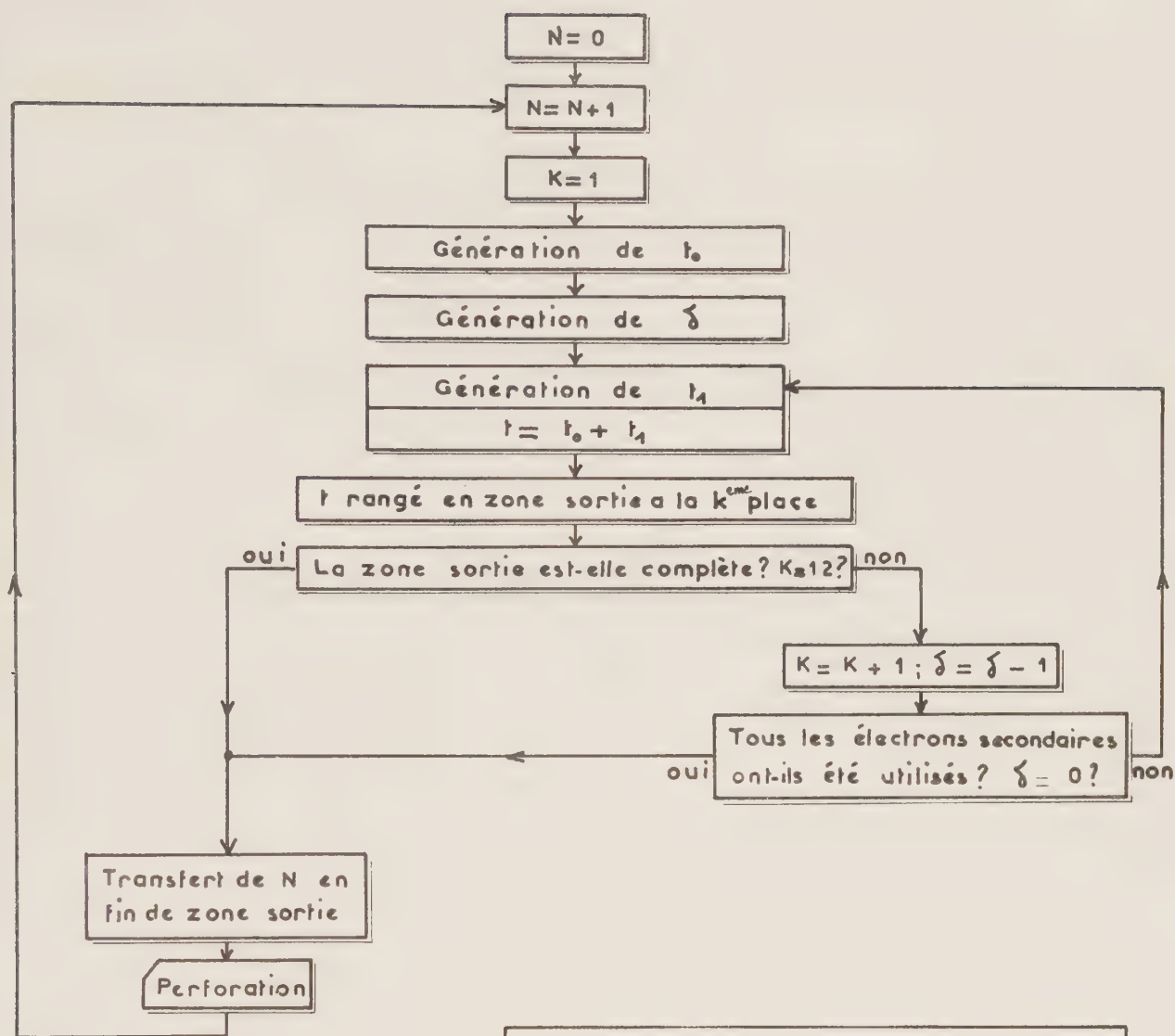


Figure 10

N = Numéro du photoélectron.
 K = Position en zone sortie.
 t_0 = Temps de transit dans l'optique d'entrée.
 δ = Coefficient d'émission secondaire.
 t_1 = Temps de transit $D_1 D_2$.

Les résultats de ce programme se présentent sur cartes perforées. Chaque carte porte le numéro de référence du photoélectron correspondant.

La figure 10 représente l'organigramme de ce programme.

VI-1-b - Simulation d'un espace interdynode D_i D_{i+1} :

Les données sont les résultats de la simulation de l'espace interélectrode précédent. Les résultats sont les instants d'arrivée sur la dynode D_{i+1} (figure 11.)

Les distributions sont les mêmes que pour le précédent programme.

La figure 12 montre l'organigramme de ce programme.

VI - 2 - SIMULATION 2

VI-2-a - Simulation de l'optique d'entrée

Nous avons essayé de déterminer la distribution des temps de transit à partir des hypothèses suivantes.

L'effet de la composante axiale de la vitesse seule est pris en considération.

La distribution des vitesses initiales des photoélectrons est maxwellienne et de la forme :

$$P(v) dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{v_p^2}} \cdot \frac{dv}{v_p}$$

v_p est la vitesse la plus probable.

L'énergie des photoélectrons est comprise entre 0 et 1,1 eV.

Cette donnée permet de calculer v_p (21).

A une vitesse initiale nulle, pour un champ de 40 V/cm, le temps de transit dans l'optique d'entrée est $T_0 = 12$ ns pour un 56 AVP (18).

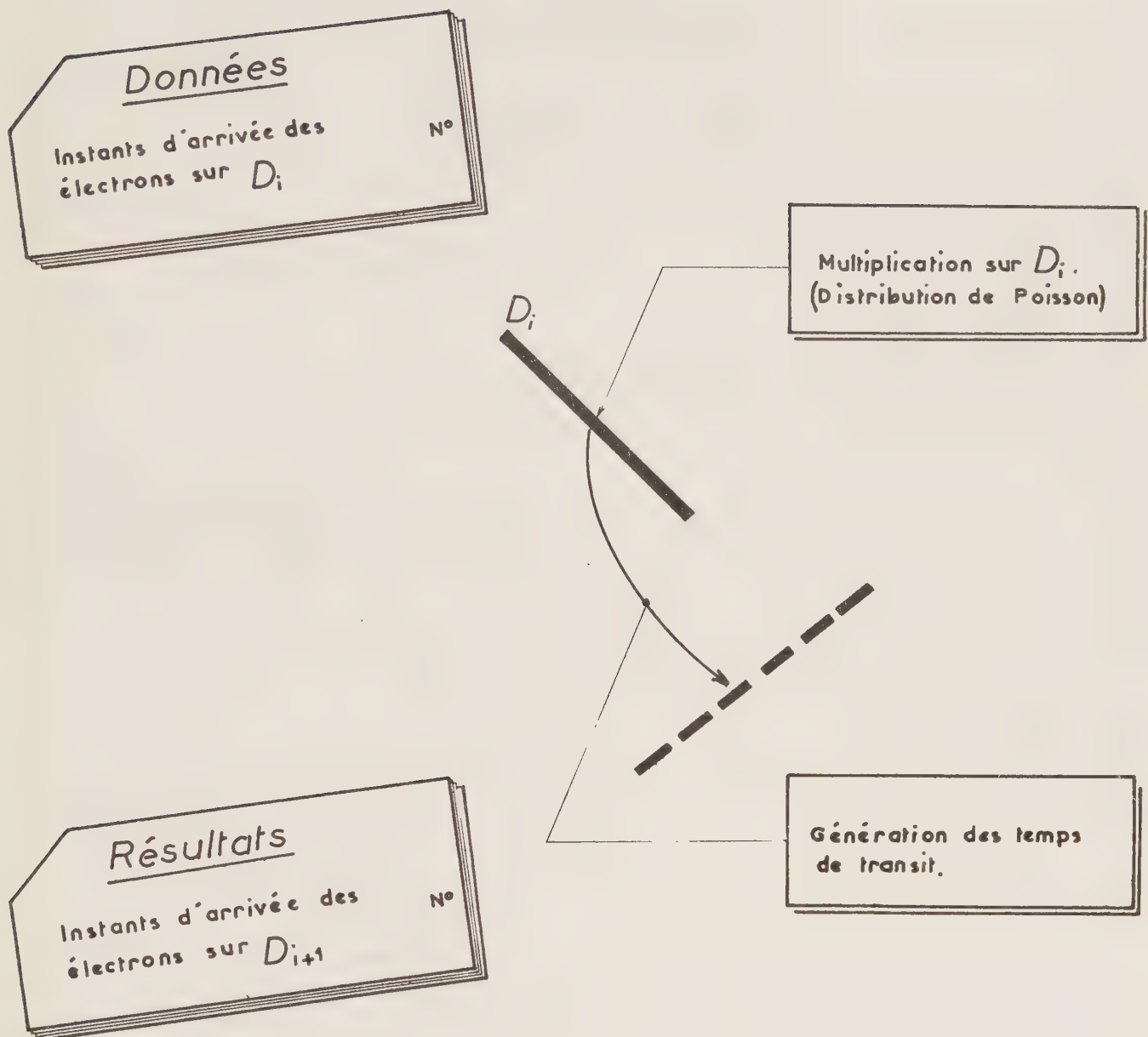
A cause des vitesses initiales le temps de transit s'exprime par :

$$T = T_0 + z$$

Où z est lié à la vitesse initiale par la formule approchée (19).

$$z = \frac{\sqrt{2m}}{e} \cdot \frac{1}{E} \cdot \sqrt{u}$$

dans laquelle m et e caractérisent la masse et la charge de l'électron, E le champ électrique sur la cathode et u l'énergie du photoélectron. Ceci permet de déterminer

Figure 11

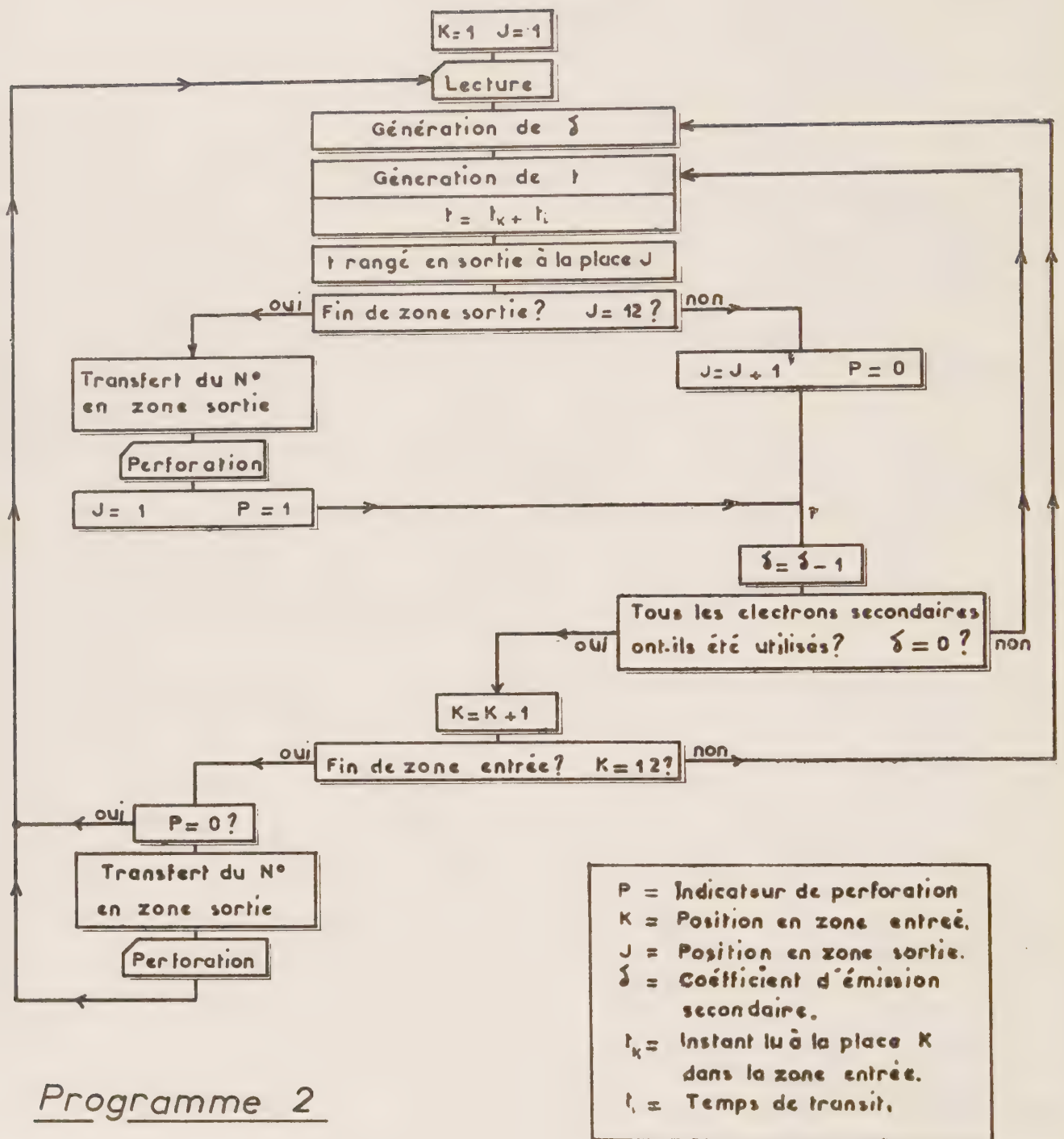


Figure 12

la distribution des z à partir de $p(v)$

$$p(z) dz = \frac{6}{\sqrt{\pi}} e^{-9z^2} dz \quad z \geq 0$$

Ceci correspond à une valeur la plus probable pour z de 0,190 ns et à une variance de $0,024 \text{ (ns)}^2$.

Cette distribution est générée par le procédé classique de génération d'une variable aléatoire discrète en approximant la loi $p(z)$ par une fonction en escalier. (MARSAGLIA (16)).

Le résultat de ce programme est les instants d'arrivée sur la dynode 1 (figure 13).

VI-2-b - Simulation d'un espace interdynode $D_i D_{i+1}$

Le programme est identique à celui de la simulation 1. Les distributions seules changent.

Le temps de transit dans l'espace $D_1 D_2$ suit la loi statistique :

$$p(t) dt = \frac{2\pi}{64} t \cdot e^{-\frac{\pi t^2}{64}} dt$$

Valeur moyenne : 4 ns

Variance : $4,47 \text{ (ns)}^2$

Tous les autres espaces interdynodes ont des temps de transit suivant la distribution :

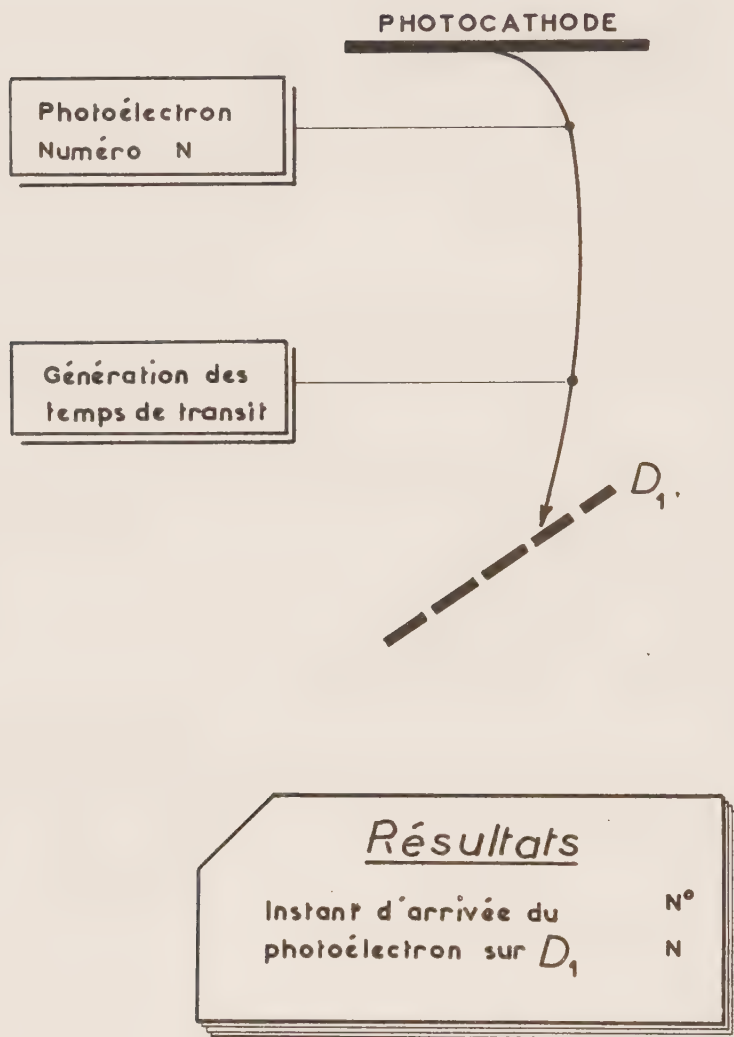
$$p(t) dt = \frac{2\pi}{16} t \cdot e^{-\frac{\pi t^2}{16}} dt$$

Valeur moyenne : 2 ns

Variance : $1,12 \text{ (ns)}^2$

Sur la dynode 1 le coefficient d'émission suit une loi de Poisson de paramètre 8 sur toutes les autres dynodes le paramètre est 3.

Les lois de Poisson et les distributions des temps de transit sont générées suivant la méthode rapide de MARSAGLIA (16).

SIMULATION 2 Programme 1Figure 13

VI - 3 - PROGRAMMES DE TRAITEMENT DES DONNEES

En complément à ces programmes de simulation nous avons mis au point trois autres programmes de traitement des données :

a) Programme appliquant le test du X^2 permettant de vérifier que les distributions générées ont bien les propriétés statistiques des distributions voulues.

b) Programme traitant les résultats sur les dynodes successives.

Pour une expérience donnée, c'est à dire pour un photoélectron donné, ce programme calcule :

- Le nombre total des électrons arrivant sur la dynode : gain
- La position du barycentre : h
- La variance de la distribution des électrons dans le temps : λ
- La variance relative : λ^2 / h^2

c) Pour une dynode donnée, un programme permettant le calcul de la valeur moyenne, de la variance et de la variance relative des distributions du gain, de h , de λ et de $\frac{\lambda^2}{h^2}$.

CHAPITRE VII

SIMULATION DU FONCTIONNEMENT DU PHOTOMULTIPLICATEURRESULTATSVII - 1 - SIMULATION 1VII-1-a - Test des distributionsDistribution des temps de transit

6 degrés de liberté. $X^2 = 4,01$.

La distribution de X^2 à 6 degrés de liberté donne :

$$P_r. \left[X^2 > 10,64 \right] = 0,10$$

La valeur trouvée correspond bien à une probabilité $P > 5 \%$.

Distribution de Poisson de paramètre 3

4 degrés de liberté $X^2 = 8,74$.

Or nous avons :

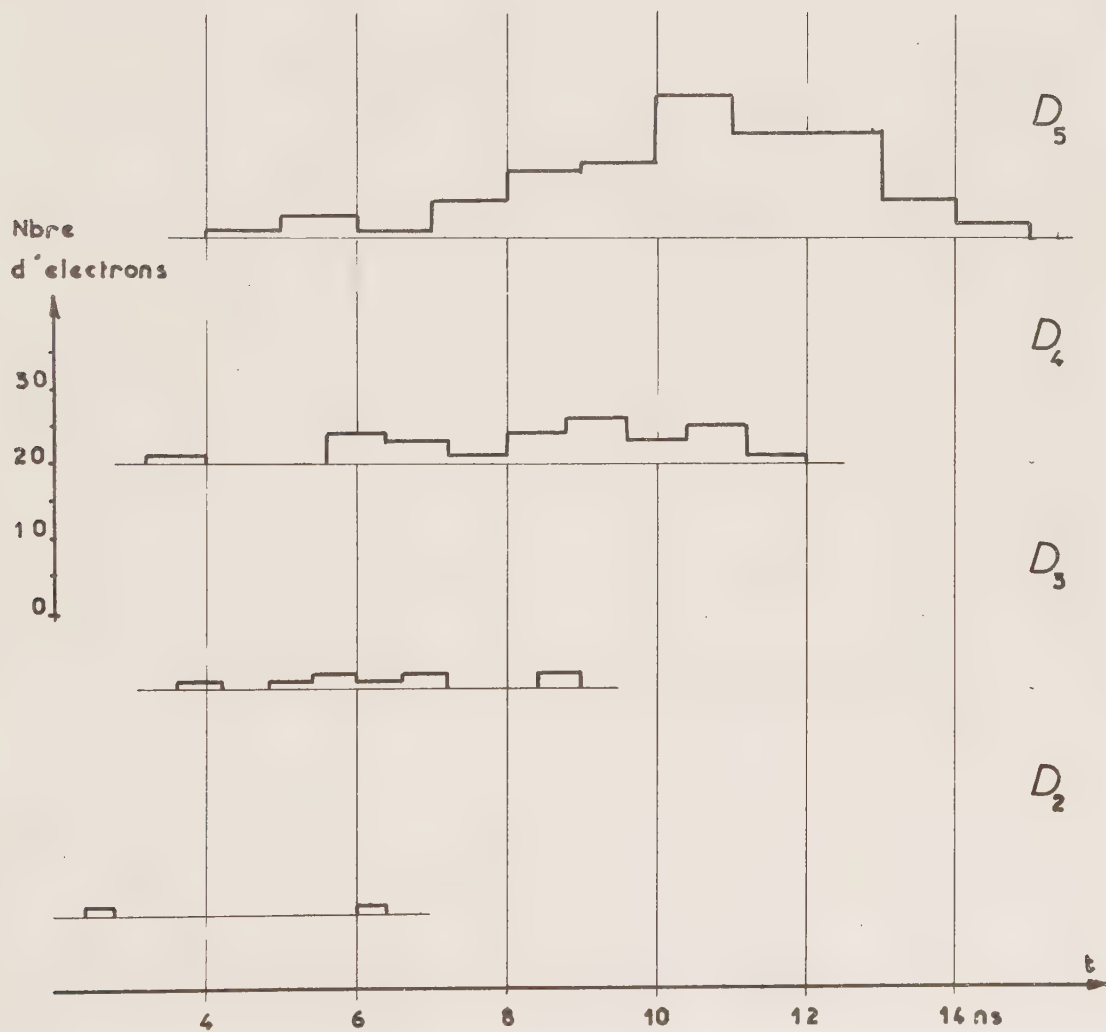
$$P_r. \left[X^2 > 9,49 \right] = 0,05$$

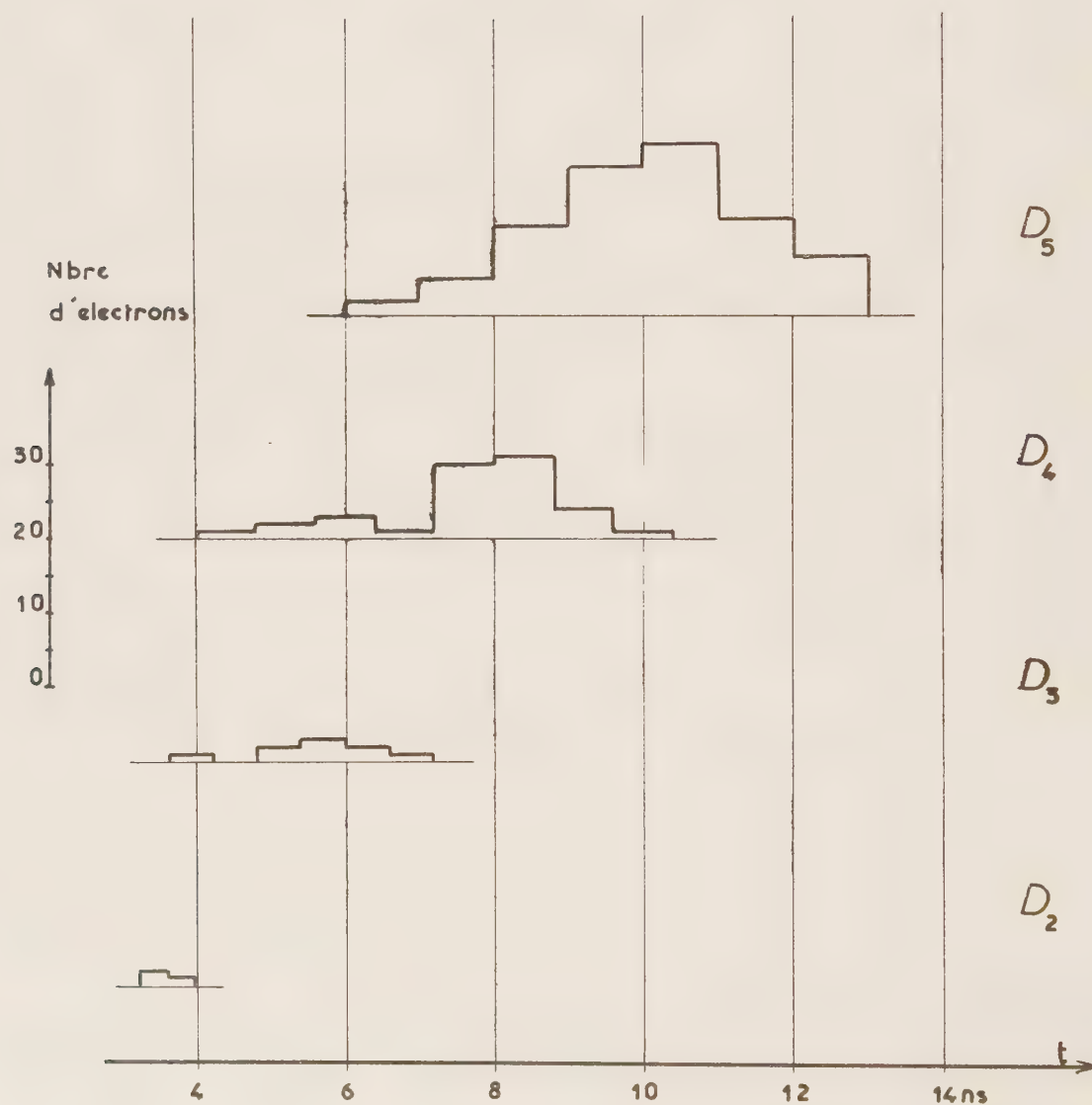
La valeur trouvée correspond encore à $P > 5 \%$.

Les distributions ainsi générées sont correctes.

VII-1-b - Evolution de la distribution des électrons sur les dynodes successives

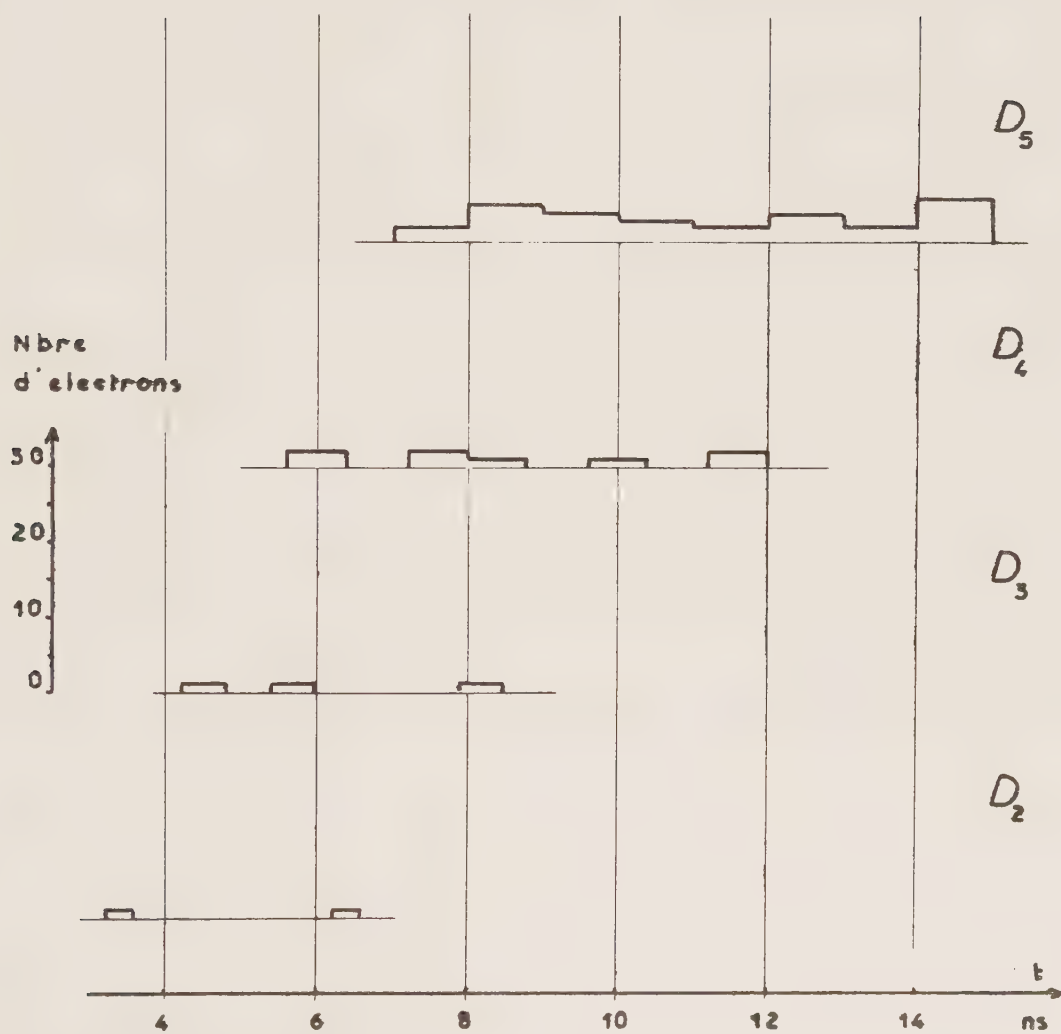
Nous avons choisi quelques expériences dont nous montrons les résultats sur les figures 14, 15, 16.

SIMULATION 1PHOTOELECTRON N° 20Evolution de l'impulsionFigure 14

SIMULATION 1PHOTOELECTRON N° 17Evolution de l'impulsionFigure 15

SIMULATION 1

PHOTOELECTRON N° 39



Evolution de l'impulsion

Figure 16

Nous voyons que dans les cas des photoélectrons N°17 et N° 20 la forme de la distribution se précise assez vite et tend vers une forme unimodale. Par contre dans le cas du photoélectron N°39, très voisin sur la dynode 2 au cas N°20, la forme reste imprécise.

Il serait bon, alors, d'étudier les différentes caractéristiques de ces distributions pour voir dans quelle mesure on peut dire que des cas de la figure 16 sont rares ou pas.

Nous avons donc étudié :

- La distribution du nombre total d'électrons sur chaque dynode. Cette grandeur est le gain.
- La distribution des barycentres. (grandeur h).
- La distribution des écarts types : (grandeur λ).
- La distribution des variances relatives (λ^2/h^2).

VII.1.c - Distribution du gain

Le fait que le coefficient d'émission secondaire obéisse à une loi de Poisson permet le calcul théorique des caractéristiques de la distribution du gain.

Nous obtenons le tableau de comparaison suivant :

Arrivée sur la Dynode :	Valeur moyenne		Variance	
	Résultat de la simulation.	Calculée.	Résultat de la simulation.	Calculée.
2	3, 37	3	3, 11	3
3	9, 26	9	35, 6	36
4	27, 06	27	329	351
5	85, 35	81	2965	3240

La correspondance est très bonne et constitue une vérification du procédé, au moins en ce qui concerne la distribution du coefficient d'émission secondaire. Ce résultat confirme celui du test du X^2 .

VII-1-d - Distribution des barycentres (h):

Nous montrons les résultats figure 17.

Nous constatons un excellent alignement des valeurs moyennes de ces distributions. Il est évident que le temps de transit moyen, pour arriver à une dynode donnée, est égal à la somme des temps de transit moyen dans les intervalles inter-électrodes successifs. Ce résultat constitue donc aussi une vérification du procédé.

On constate d'autre part que la distribution conserve à peu près les mêmes formes. En effet l'évolution de sa variance est la suivante :

<u>Arrivée sur</u>	<u>Variance = $\epsilon_{ph}^2 (ns)^2$</u>
D ₁	1
D ₂	1, 23
D ₃	1, 86
D ₄	2, 06
D ₅	2, 16

La variance de la distribution des barycentres ne passe que du simple au double sur un intervalle de 5 dynodes.

La variance relative diminue rapidement :

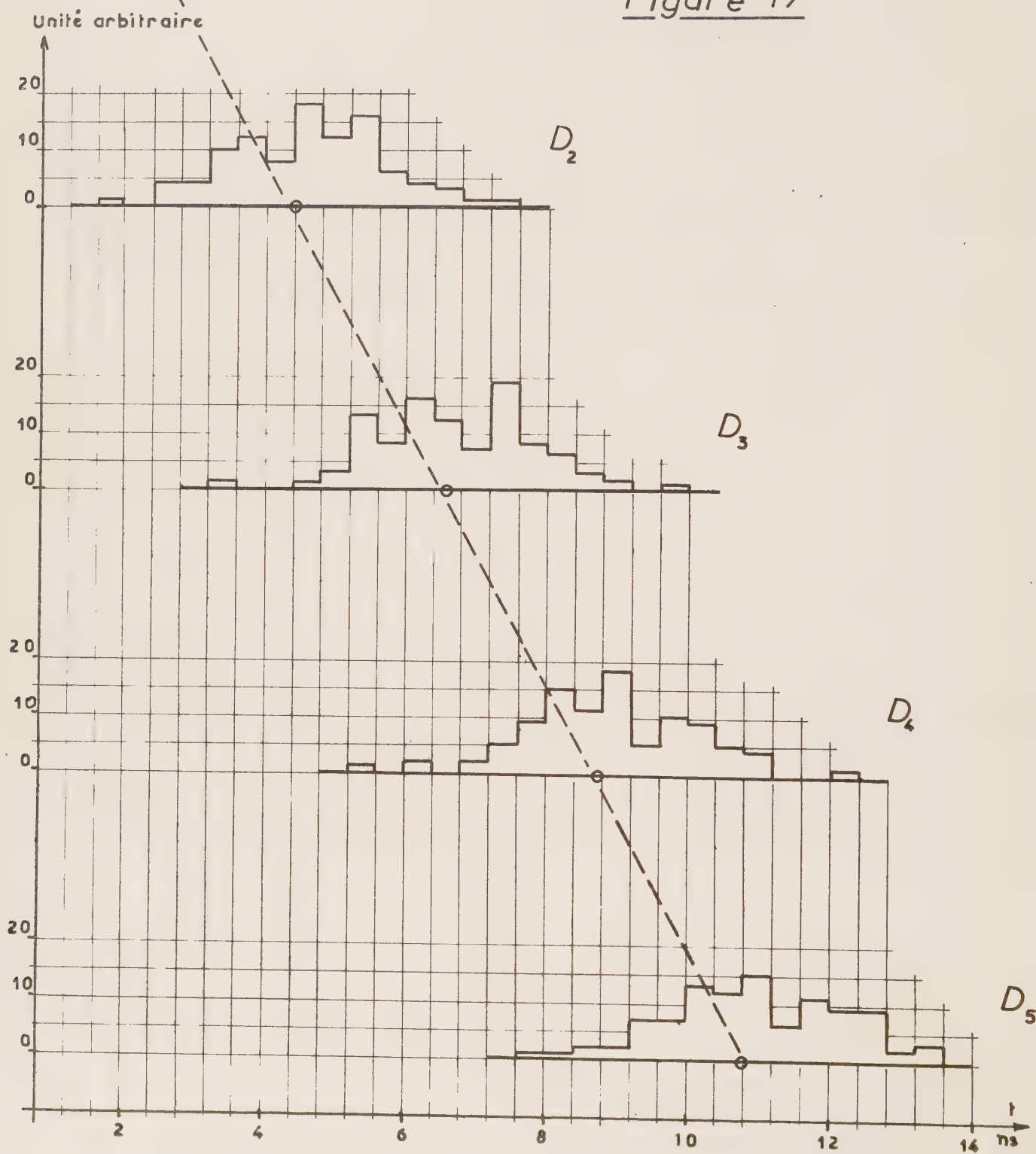
<u>Arrivée sur</u>	<u>Variance relative = $\frac{\epsilon_{ph}^2}{h^2}$</u>
D ₁	0, 21
D ₂	0, 62
D ₃	0, 43
D ₄	0, 27
D ₅	0, 18

VII-1-e - Distribution des λ

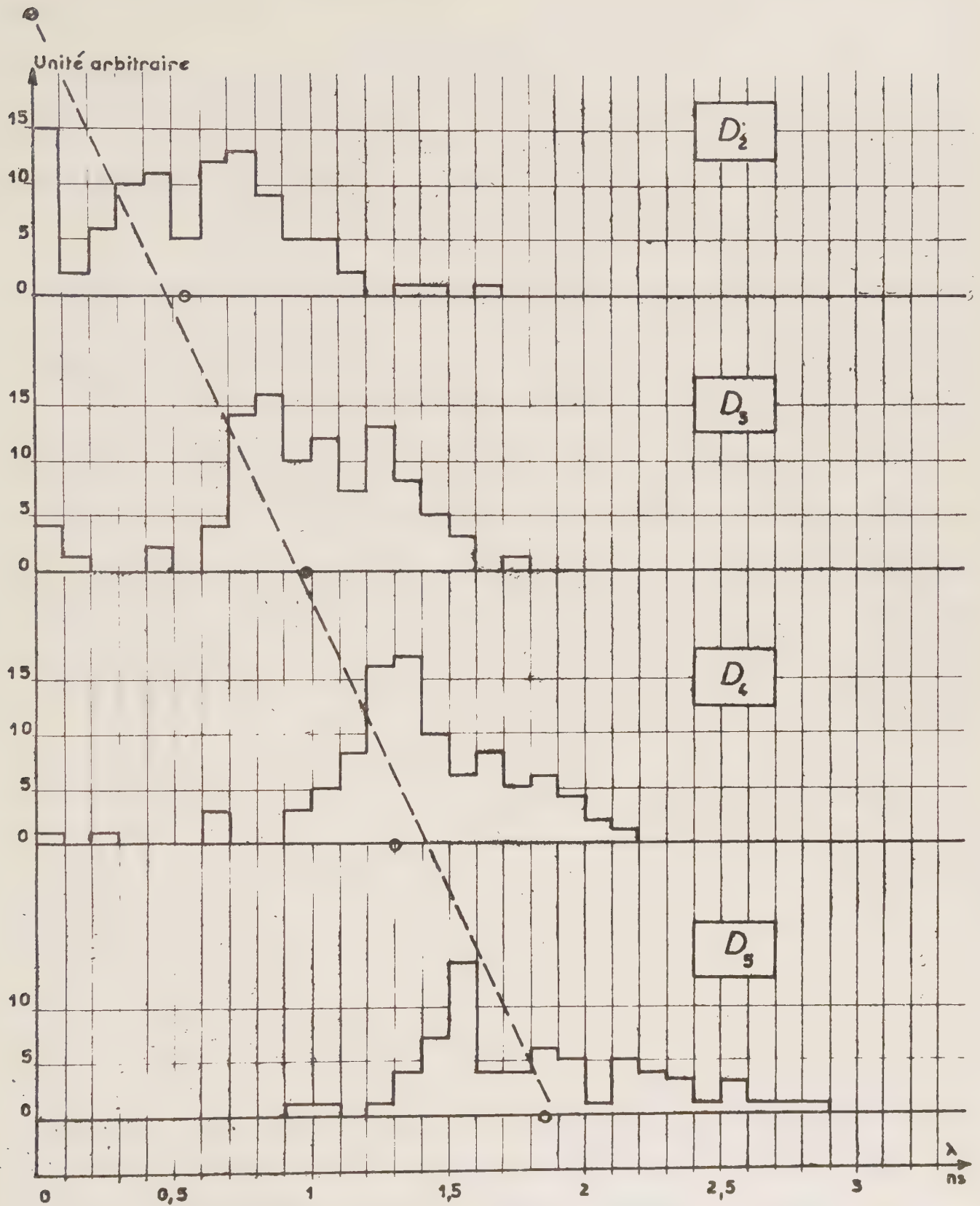
Les différentes distributions pour chaque dynode sont présentées figure 18.

On observe l'alignement des valeurs moyennes de $\bar{\lambda}$, même si on tient

60

 D_1 Figure 17

SIMULATION 1 Distribution des barycentres



SIMULATION 1

Distribution des λ

compte de l'écart type de chaque distribution d'électrons sur D_1 . Cet écart type est évidemment nul car nous n'avons à chaque fois qu'un électron sur D_1 .

Nous aurions donc dans ce cas où toutes les distributions de temps de transit sont gaussiennes et identiques une loi de la forme :

$\bar{\lambda} = k.n$ où n représente le nombre d'intervalles interdynodes franchis.
(avec $k = 0,37$).

Ce résultat vient en contradiction avec la formule résultant des approximations de GATTI (8) et calculée dans des conditions analogues :

$\bar{\lambda}^2 = (N-1) \epsilon_{dd}^2$ où ϵ_{dd}^2 représente la variance de la distribution de temps de transit interdynode et N le nombre total d'électrodes y compris celle de départ. ($n = N - 1$)

La forme des distributions de λ évolue de dynode en dynode et ne semble pas vouloir se préciser.

Nous donnons dans le tableau suivant l'évolution de la variance et de la variance relative ϵ_{λ}^2 .

<u>Arrivée sur:</u>	<u>Variance (ns)².</u>	<u>Variance relative ϵ_{λ}^2.</u>
D_2	0,133	0,45
D_3	0,107	0,108
D_4	0,229	0,135
D_5	0,036	0,010

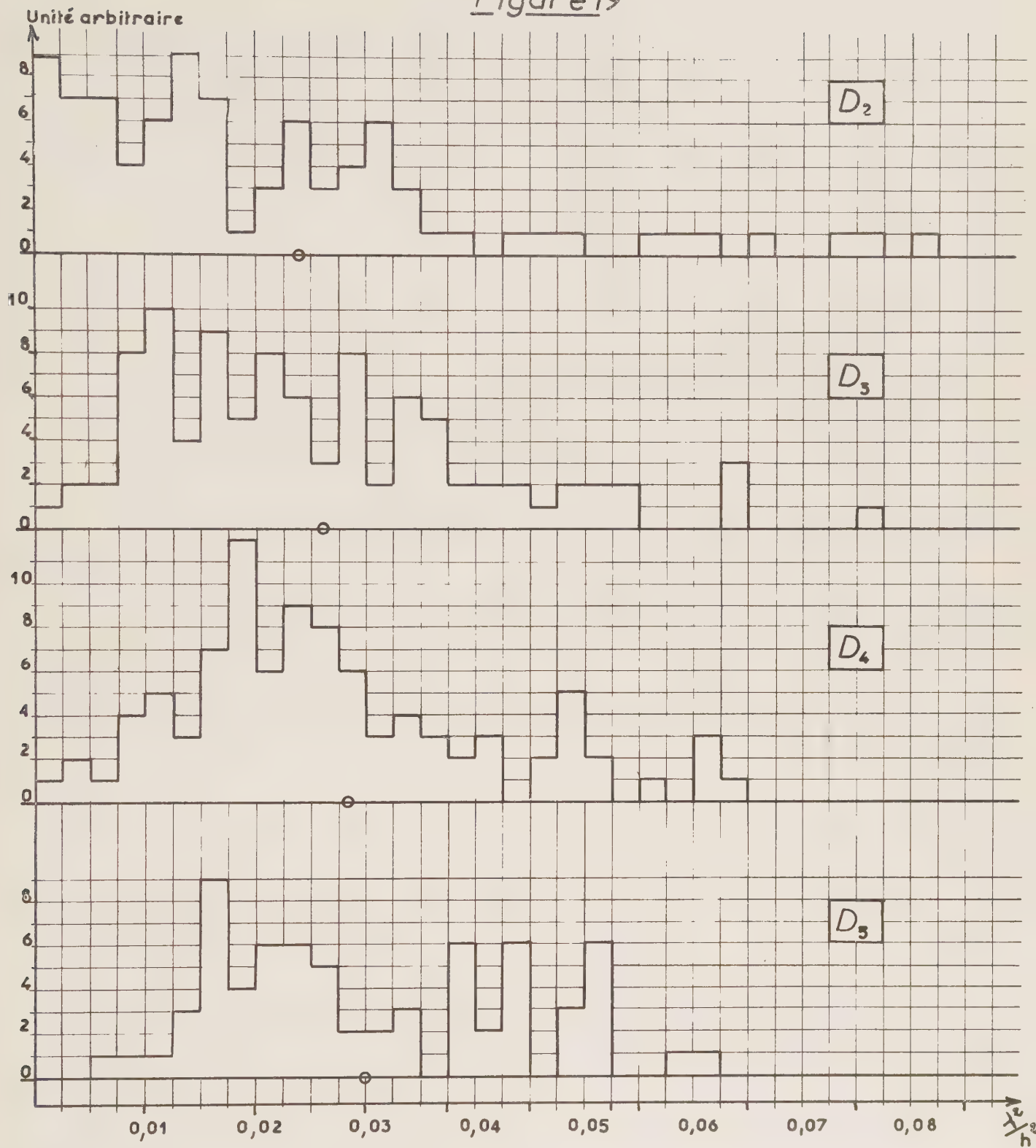
VII-1-f - Distribution des variances relatives λ^2/h^2

Nos résultats sont représentés figure 19.

Nous constatons que la valeur moyenne est pratiquement constante et que les valeurs de λ^2/h^2 tendent à se rassembler autour de cette valeur moyenne.

Nous avons d'ailleurs les valeurs suivantes concernant les variances et les variances relatives.

Figure 19



SIMULATION 1 Distribution des λ^2/h^2

<u>Arrivée sur:</u>	<u>Variances.</u>	<u>Variances relatives.</u>
D ₂	0,000 87	1,52
D ₃	0,000 37	0,53
D ₄	0,000 30	0,42
D ₅	0,000 20	0,22

VII - 2 - SIMULATION 2

VII-2-a - Tests des distributions :

Distribution du temps de transit dans l'optique d'entrée : $X^2 = 3,554$

Distribution du temps de transit dans un espace interdynode :

- Espace D₁D₂. Distribution de valeur moyenne 4 ns : $X^2 = 5,21$.

- Autres espaces. Distribution de valeur moyenne 2 ns : $X^2 = 4,37$.

Distribution de Poisson :

- Paramètre 3 : $X^2 = 5,90$.

- Paramètre 8 : $X^2 = 3,31$.

Tous ces tests ont été faits dans le cas où le nombre de degrés de liberté est de 5. Nous avons :

$$P_r. \left[X^2 > 7,78 \right] = 0,1$$

VII-2-b - Distribution du gain

Comparons les valeurs résultant de la simulation avec celles obtenues par calcul.

Le tableau ci-après confirme le résultat des tests du X^2 au moins en ce qui concerne la génération des lois de Poisson.

Arrivée sur	Valeur Moyenne		Variance	
	Résultat de la simulation	Calculée	Résultat de la simulation	Calculée
D ₂	7,85	8	8,4	8
D ₃	23,9	24	100,1	96
D ₄	71,2	72	1063	936
D ₅	196	216	8525	8640

VII-2-c - Distribution des barycentres h

Nos résultats sont présentés figure 20.

Nous pouvons faire les mêmes constatations que dans le cas de la première simulation.

Les valeurs moyennes se trouvent très bien alignées et la forme de la distribution reste à peu près la même. Nous pouvons en effet constater que les valeurs de l'écart type varient peu.

<u>Arrivée sur :</u>	$\epsilon_{ph} = \text{écart type} \cdot (ns)^2$	<u>Variance relative.</u>
D ₂	2,04	0,017
D ₃	2,44	0,019
D ₄	3,4	0,031
D ₅	2,2	0,011

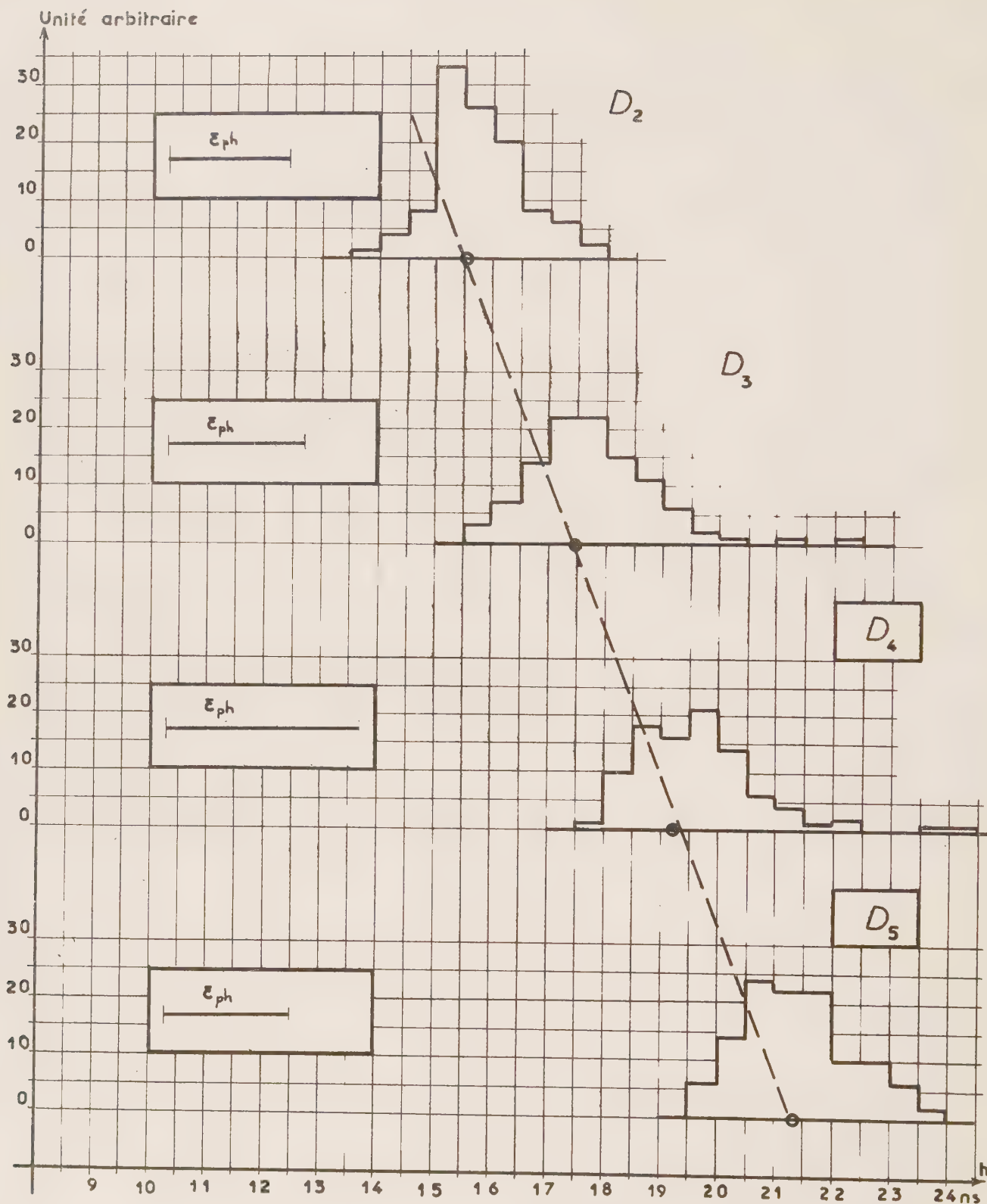
VII-2-d - Distribution des λ

Nous montrons nos résultats figure 21.

Nous n'obtenons plus la linéarité observée dans la simulation 1.

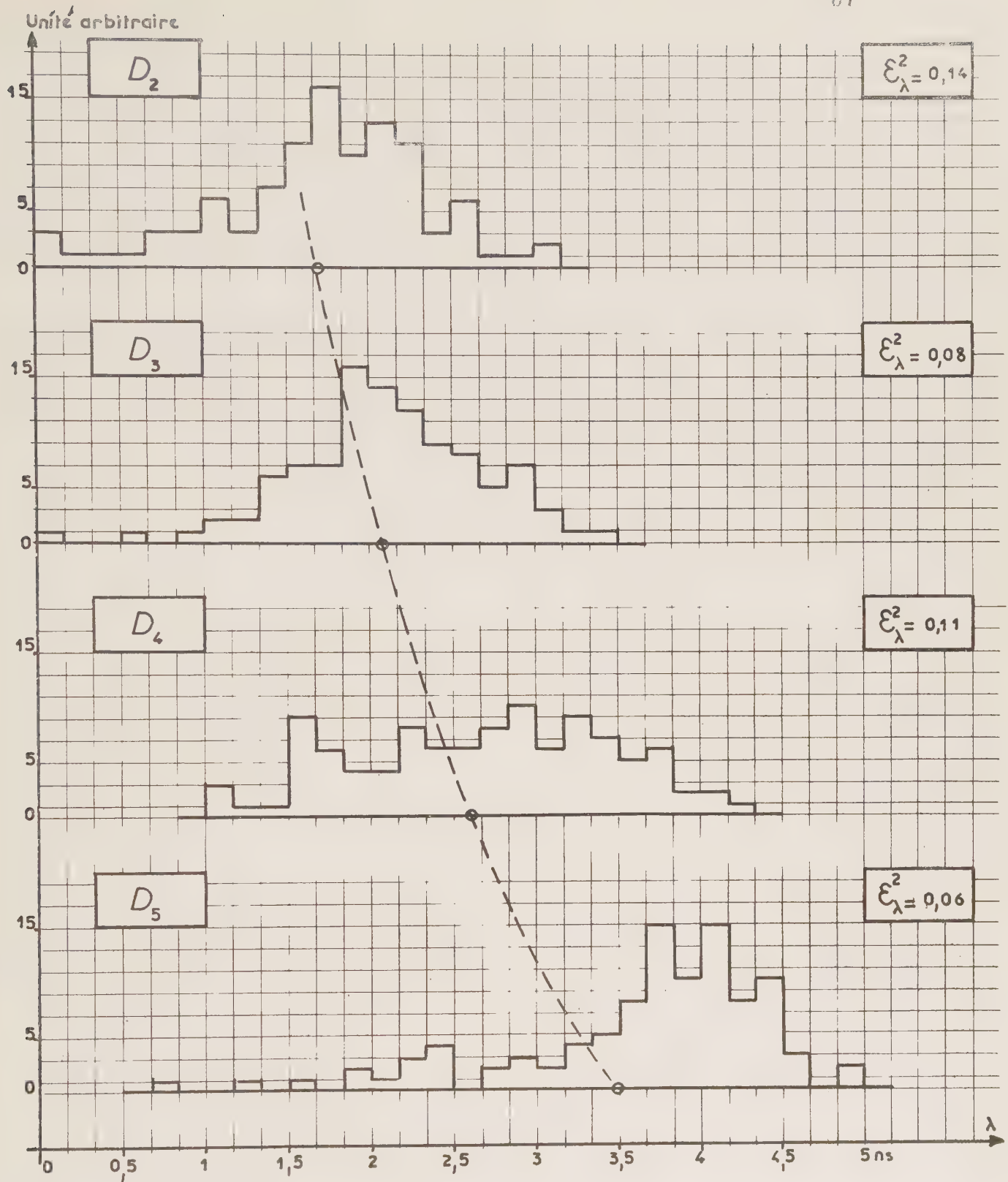
En outre la forme de la distribution s'étale de plus en plus de dynode en dynode.

Il serait intéressant de trouver à quelle différence est dû ce changement par rapport aux résultats de la simulation 1.



SIMULATION 2 Distribution des barycentres

Figure 20



SIMULATION 2 Distribution des λ

Figure 21

VII-2-e - Distribution des λ^2/h^2 :

Nos résultats sont présentés figure 22.

Nous nous trouvons à peu près dans le même cas que pour la distribution des λ . La valeur moyenne évolue plus rapidement que dans le cas de la simulation 1 en outre, la forme de la distribution s'aplatit beaucoup.

Il semblerait que l'introduction, dans le modèle statistique du photomultiplicateur, de distributions différentes modifie beaucoup les résultats statistiques obtenus par la première simulation. Il serait donc intéressant de préciser ces modifications, à quel niveau elles s'introduisent, et de quelle façon.

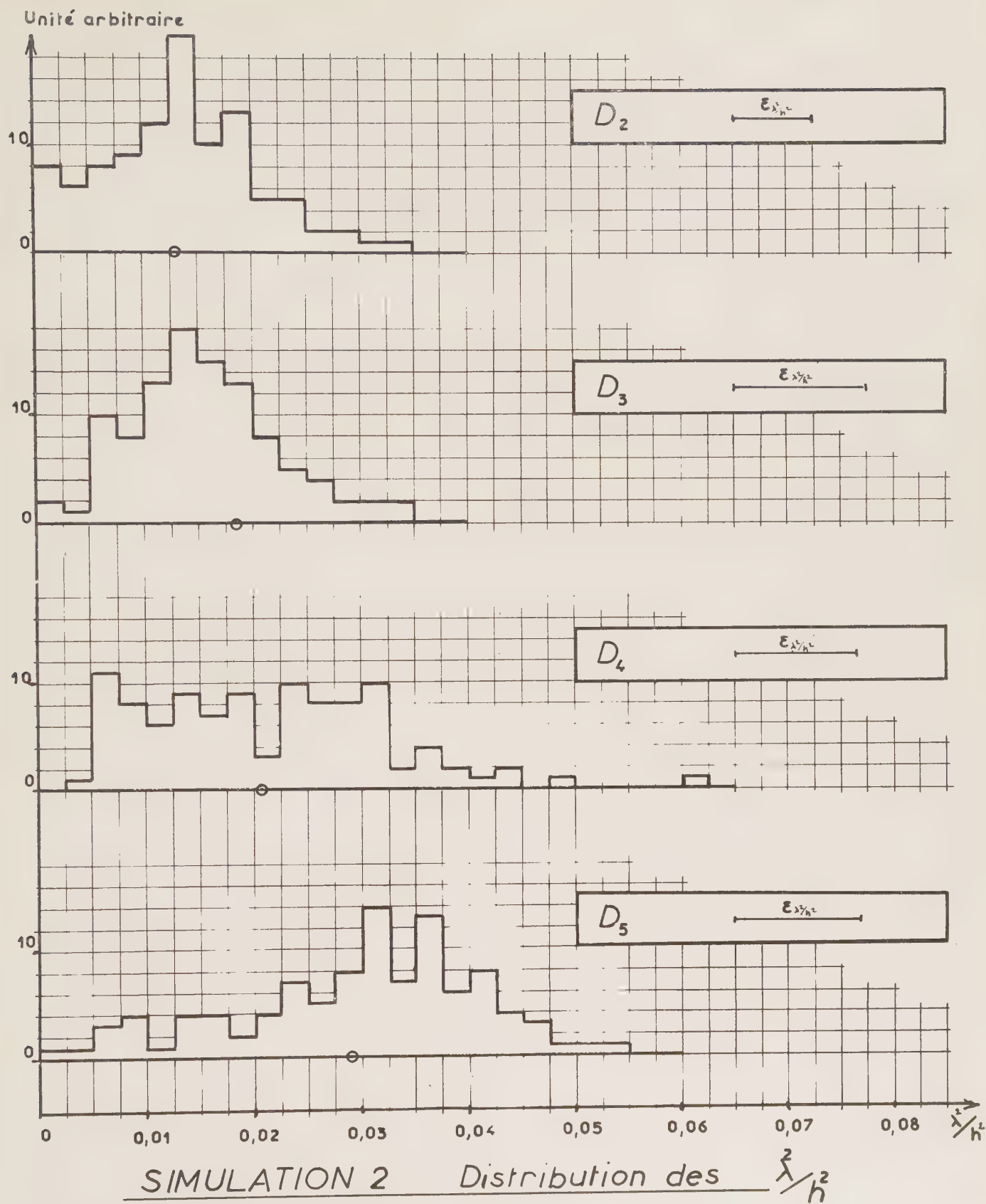


Figure 22

CONCLUSION

Le procédé de simulation apparaît comme un moyen d'étudier les propriétés statistiques du photomultiplicateur. Nous avons vu que sa souplesse nous permet de changer très facilement les conditions de la simulation et notamment les paramètres et la nature des distributions statistiques. Il serait donc tout aussi facile d'étudier un modèle statistique compliqué tenant compte de conditions de polarisation des dynodes différentes pour chaque étage, ce qui est, évidemment, pratiquement impossible par le calcul.

Le problème intéressant maintenant est donc de préciser le modèle statistique, c'est à dire de travailler avec des distributions plus proches de la réalité.

Si on peut considérer, à partir des résultats de Z. BAY et G. PAPP (20), que la distribution de POISSON décrit assez bien le phénomène de multiplication, on a pu voir que les distributions des temps de transit étaient très mal connues. Il est donc important d'en savoir davantage sur la distribution angulaire et en énergie des électrons secondaires d'une part, et sur l'influence de la géométrie sur le temps de transit d'autre part. Bien que le phénomène d'émission secondaire ait été beaucoup étudié avec les métaux (26, 27, 28) il existe assez peu de résultats expérimentaux sur les électrons secondaires émis à partir des matériaux constituant les dynodes. Par contre l'étude de l'influence de la géométrie peut se faire assez facilement en utilisant les relevés de cuve rhéographique.

On a pu remarquer, d'autre part, que les résultats obtenus dans les deux simulations ne sont pas comparables. Ceci est surtout vrai pour les grandeurs statistiques comme $\bar{\lambda}$ et λ^2/h^2 qu'on ne peut calculer par un autre procédé que la simulation. Par exemple : l'évolution linéaire de $\bar{\lambda}$ en fonction du nombre des dynodes disparaît dans la simulation II. Cela tient surtout au fait que nous avons compli-

qué trop vite le modèle statistique et nous ne savons pas à quelle influence est due la différence observée. En fait, la simulation I apparaît comme l'étude d'une structure multiplicatrice aux étages tous identiques. La simulation II lui ajoute les effets de l'optique d'entrée et du premier espace interdynode ce qui change toutes les conditions.

En conclusion, il apparaît qu'il serait profitable de continuer l'étude dans le sens de la simulation I. On pourrait déterminer l'influence des différents paramètres (coefficients d'émission secondaire, valeur moyenne et variance du temps de transit) sur $\bar{\lambda}$. Cette étude aurait l'intérêt de nous donner une bonne connaissance statistique de la structure multiplicatrice en ne faisant appel du point de vue des temps de transit qu'à la variance et à la valeur moyenne, grandeurs évidemment beaucoup plus accessibles expérimentalement que la distribution elle même. On pourrait notamment étudier l'influence de la géométrie du système ce qui pourrait conduire à une amélioration du photomultiplicateur.

Ayant ainsi acquis une bonne connaissance des propriétés statistiques de la structure multiplicatrice, nous pourrons lui ajouter, d'abord les effets d'un espace interdynode aux propriétés statistiques correspondant à l'espace $D_1 D_2$, puis les effets d'une optique d'entrée. Une telle procédure nous permettra de tirer des conclusions intéressantes qui sont masquées dans la simulation II.

Nous citerons pour finir des résultats expérimentaux obtenus au laboratoire d'Electronique et de Physique appliquée de Paris concernant $\bar{\lambda}$. Les valeurs trouvées pour un multiplicateur d'électrons à 8 dynodes associé à un canon à électrons et pour un photomultiplicateur à 12 dynodes excité par des impulsions lumineuses brèves ne vérifient pas la loi linéaire trouvée par simulation.

Mais il faut tenir compte de ce que les conditions de l'expérience sont sensiblement différentes non seulement entre les deux manipulations elles mêmes, mais encore, entre celles-ci et celles de la simulation I. La loi linéaire, en effet, ne tient compte que de la structure multiplicatrice et non de l'optique d'entrée et de l'intervalle dernière dynode-anode. On ne sait donc pas de quelle façon l'influence de ceux-ci modifiera le rapport des $\bar{\lambda}$.

Une étude expérimentale vérifiant l'évolution de $\bar{\lambda}$ est envisagée. Elle porterait sur une structure multiplicatrice dont on pourrait faire varier le nombre de dynodes et qui serait associée à un canon à électrons.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - E. BREITENBERGER
Scintillation spectrometer statistics.
Progress in nuclear physics - 4 - page 56.
- 2 - G. GAZIER
Contribution à l'étude des propriétés statistiques du gain du photomultiplicateur.
Rapport LEP B 77 - Février 1964.

P. MOATTI
Etude de la linéarité et des propriétés statistiques du gain du photomultiplicateur.
Thèse de doctorat es Sciences - Paris (Juin 1963.)
- 3 - M. BRAULT et C. GAZIER
Sur quelques propriétés statistiques du photomultiplicateur.
Compte rendu à l'Académie des Sciences -(4 Février 1963). t. 256, page 1241.
- 4 - F.J. LOMBARD et F. MARTIN
Multiplication statistique des électrons.
Review of scientific Instruments 32, 200, (1961)
- 5 - A. BLANC LAPIERRE
Modèles statistiques pour l'étude des phénomènes de fluctuations.
Page 80 - Editeur Masson.
- 6 - R.F. POST et L.F. SCHIFF
Statistical limitation on the resolving time of a scintillation counter.
Physical Review 80, 1113, (1950.)
- 7 - E. GATTI, S. COLOMBO et M. PIGNANELLI
Accuracy limits in the measurement of time intervals by scintillation counter pulses. - II Nuovo Cimento 6, 1739, (1957.)
- 8 - E. GATTI et V. SVELTO
Theory of time resolution in scintillation counters.
Nuclear Instruments and Methods 4, 189, (1959)
- 9 - E. GATTI et V. SVELTO
Times resolution in scintillation counters.
Symposium on nuclear instruments - Harwell 1961 - page 35.
- 10 - F.T. ARECCHI, A. de MATTEIS et E. GATTI
Statistical limits in timing with slow scintillators.
Energia nucleare N° 10, (1960.)

- 11 - E. GATTI et V. SVELTO
Revised theory of time resolution in scintillation counters.
Nuclear Instruments and Methods 30, 213,(1964.)
- 12 - Information scientifique BULL -
Les méthodes de simulations.
- 13 - J. GREA
Recherche sur l'application de la méthode de Monte Carlo dans le processus de physique nucléaire à haute énergie. Interaction des pions négatifs de 4, 5 GeV.
Doctorat 3 ème Cycle.Lyon 1961.
- 14 - M.H. KALOS
Monte Carlo calculations of the ground state of the three and four body nuclei.
Physical Review 128, 1791,(1962.)
- 15 - T.E. HULL et A.R. DOBELL
Random numbers generators.
SIAM Review 4, 230,(1962.)
- 16 - G. MARSAGLIA
Generating discrete random variables in a computer.
Communication of the ACM 6, 37,(1963.)
- 17 - H. KAHN
Application of Monte Carlo Method.
AECU 3259, 49,(1954.)
- 18 - A. VAN DER ZIEL
Noise (PrenticeHall N.Y.) page 113
- 19 - R.F. TUSTING, Q.A. KERNS et H.K. KNUDSEN
Ire transation on nuclear science - NS 9, 118,(1962.)
- 20 - Z. BAY et G. PAPP
Détermination of the probability distribution of the number of secondary electron.
IEEE transation on nuclear science - 11, 160,(1964.)
- 21 - G. PIETRI
Les photomultiplicateurs.
Acta Electronica 5, 7,(1961.)
- 22 - M. BARBIER
Limites physiques de la correction de temps de vol dans un photomultiplicateur.
CERN 60 - 34,(Aout 1960.)
- 23 - L.G. HYMAN, R.M. SECHWARCZ et R.A.SCHLUTER
Study of high speed photomultipliers systems.
Review of scientific Instruments, 35, 393,(1964.)

- 24 - M.A. EL WAHAB et J.V. KANE
An analytic treatment for scintillation counter time resolution function.
Nuclear Instruments and Methods 15, 15, (1962.)
- 25 - J. GREA et R. LAVERRIERE
Choix d'une suite de nombres pseudoaléatoires pour la méthode de Monte Carlo.
LIPN, 6205, A, (Février 1962.)
- 26 - L. JONKER
Theory of secondary emission.
Philips research report 7, 1, (1952.)
- 27 - R.G. LYE et A.J. DEKKER
Theory of secondary emission
Physical Review 107, 977, (1957.)
- 28 - E.M. BAROODY
A theory of secondary electron emission from metals.
Physical Review 78, 780, (1950.)

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	1
<u>PREMIERE PARTIE : ETUDE GENERALE DU PHOTOMULTIPLICATEUR</u>	
<u>RESOLUTION</u>	3
<u>CHAPITRE I</u> - <u>Rappels sur le fonctionnement du photomultiplicateur</u>	4
I.1 - La photocathode et l'optique d'entrée	4
I.2 - Le multiplicateur d'électrons	4
<u>CHAPITRE II</u> - <u>Résolution du photomultiplicateur en énergie</u>	7
II.1 - Rappels sur les fonctions génératrices	7
II.1.a - Définitions	7
II.1.b - Applications à des processus particuliers ...	8
II.2 - Calcul de la résolution en énergie	9
II.2.a - Rôle du photomultiplicateur seul.....	9
II.2.b - Résolution de l'ensemble photomultiplicateur- scintillateur	10
<u>CHAPITRE III</u> - <u>Résolution du photomultiplicateur en temps</u>	14
III.1 - Action des différentes parties du photomultiplicateur vis à vis de la variable temps	14
III.1.a - La photocathode	14
III.1.b - L'optique d'entrée et le multiplicateur	14
III.1.c - Le circuit de charge	15
III.1.d - Domaines d'études	15

III.2 - Scintillateur très lent	16
III.2.a - Variance de l'instant de collection d'une charge C donnée	16
III.2.b - Variance du barycentre d'une charge C collectée	21
III.3 - Scintillateur lent	24
III.4 - Scintillateur rapide	26

DEUXIEME PARTIE - ETUDE DE LA REPONSE DU PHOTOMULTIPLICA -
TEUR A UN SEUL PHOTOELECTRON PAR SIMULA-
TION SUR CALCULATEUR 29

<u>CHAPITRE IV - La méthode de Monte Carlo</u>	30
IV.1 - Généralités	30
IV.2 - Génération de distributions statistiques	31
IV.2.a - Distribution uniforme	31
IV.2.b - Distribution statistique quelconque	33

<u>CHAPITRE V - Modèles statistiques du photomultiplicateur</u>	36
V.1 - Le coefficient d'émission secondaire	36
V.2 - Les fluctuations de temps de transit	40
V.2.a - Optique d'entrée	40
V.2.b - Espace interdynode	40
V.3 - Rendement de collection	41

<u>CHAPITRE VI - Simulation du fonctionnement du photomultiplicateur.</u>	
<u>Programmes</u>	42
VI.1 - Simulation 1	45
VI.1.a - Simulation de l'optique d'entrée et de l'espace $D_1 D_2$	45
VI.1.b - Simulation d'un espace interdynode $D_i - D_{i+1}$..	48

VI.2 - Simulation 2	48
VI.2.a - Simulation de l'optique d'entrée	48
VI.2.b - Simulation d'un espace interdynode $D_i - D_{i+1}$	51
VI.3 - Programmes de traitement des données	53
 <u>CHAPITRE VII - Simulation du fonctionnement du photomultiplicateur.</u>	
<u>Résultats</u>	54
VII.1 - Simulation 1	54
VII.1.a - Tests des distributions	54
VII.1.b - Evolution de la distribution des électrons sur les dynodes successives	54
VII.1.c - Distribution du gain	58
VII.1.d - Distribution des barycentres	59
VII.1.e - Distribution des λ	59
VII.1.f - Distribution des λ^2/h^2	62
VII.2 - Simulation 2	64
VII.2.a - Tests des distributions	64
VII.2.b - Distribution du gain	64
VII.2.c - Distribution des barycentres	65
VII.2.d - Distribution des λ	68
VII.2.e - Distribution des λ^2/h^2	68
 <u>CONCLUSION</u>	 70
 <u>BIBLIOGRAPHIE</u>	 73

Vu :

Les Membres du Jury,

M. A. SARAZIN

Mme M. ERICSON

M. J.J. SAMUELI

Vu et Approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. BRACONNIER

Vu et Accordé le permis d'imprimer

Lyon, le 18 Février 1965

Le Recteur
Président du Conseil de l'Université

P. LOUIS

